

NALANDA OPEN UNIVERSITY

Course : M.A Psychology, Part-I

Paper : Paper-VI

**Prepared by : Dr. (Prof.) Prabha Shukla
Retd. Professor of Psychology, Patna University and
Chief Co-ordinator, School of Social Sciences,
Nalanda Open University**

Topic : काई वर्ग परीक्षण की उपयोगिता (Uses of Chi-Square Test)

काई वर्ग परीक्षण की उपयोगिता (Uses of Chai-Square Test)

9.1 समान संभाव्यता वितरण परिकल्पना पर आधारित प्रश्न (Problems Based on Equal Probability Distribution Hypothesis)

240 छात्रों पर एक मनोवृत्ति मापनी (Attitude scale) का व्यवहार किया गया। उस मापनी में 40 एकांश थे। प्रत्येक एकांश के तीन विकल्पी उत्तर यानी सहमत (agree), तटस्थ (neutral) तथा असहमत (disagree) थे, जिनमें से किसी एक उत्तर को चुनकर निशान लगाना था। एकांश संख्या 15 पर छात्रों द्वारा दिए गए उत्तर (fo) नीचे टेबुल-1 में दिए गए हैं। प्रश्न है कि क्या ये उत्तर समान संभाव्यता परिकल्पना पर प्रत्याशित उत्तर (fe) से सार्थक रूप से भिन्न (significantly different) हैं?

Table - 1

सहमत (Agree)	तटस्थ (Neutral)	असहमत (Disagree)	
70	50	120	240

समाधान (Solution) — Table-1 में तीन श्रेणियों में छात्रों के उत्तरों से प्राप्त बारंबारताएँ (frequencies) अंकित हैं। अतः इन्हें fo कहेंगे। अब समान संभाव्यता परिकल्पना (equal probability hypothesis) का आधार पर इस समस्या का समाधान इस प्रकार किया जाएगा —

Table - 2

	सहमत (Agree)	तटस्थ (Neutral)	असहमत (Disagree)	योगफल (Total)
fo :	70	50	120	240
fe :	80	80	80	240
fo - fe =	-10	-30	40	
(fo - fe) ² =	100	900	1600	

$$\frac{(fo - fe)^2}{fe} = \frac{100}{80} \Rightarrow 1.25, \frac{900}{80} \Rightarrow 11.25, \frac{1600}{80} \Rightarrow 20$$

$$\text{अब } \chi^2 = \sum \left(\frac{(fo - fe)^2}{fe} \right) \Rightarrow 1.25 + 11.25 + 20 \Rightarrow 32.5$$

काई-वर्ग के परिकलन के चरण (Steps of Calculating Chi-Square)

उपर्युक्त परिकलन (calculation) पर ध्यान देने से पता चलता है कि इसमें निम्नलिखित चरण (steps) शामिल होते हैं —

(i) सबसे पहले दिए गए fo को उसी रूप में लिख दिया जाता है। सभी श्रेणियों (categories) के fo को जोड़कर दाहिनी ओर लिखा जाता है। यदि पहले से ही fo का योगफल दिया रहता है तो उसे उसी रूप में लिख दिया जाता है। जैसे टेबुल 2 में तीन श्रेणियों के fo (70+50+120) का योगफल 240 है, जिसे उसी रूप में लिख दिया गया है।

(ii) दूसरे चरण में खानों या श्रेणियों की संख्या से कुल fo को भाग दिया जाता है। जो भागफल होता है, उसे प्रत्येक खाना या श्रेणी में लिख दिया जाता है। जैसे- टेबुल 2 में खानों या श्रेणियों की संख्या 3 है और कुल fo 240 है। इसलिए 240 को 3 से भाग देने पर 80 भागफल हुआ। इसलिए, fe वाले प्रत्येक खाना या श्रेणी में 80 लिख दिया गया है। इसका भी योगफल 240 (80+80+80) हुआ, जिसको fe वाले खाने के सामने लिख दिया गया है।

(iii) इसके बाद तीसरे चरण में fo-fe निकाला जाता है। यहाँ प्रत्येक fo में से fe को घटा-घटाकर उसके सामने लिखा जाता है। जैसे, टेबुल-2 में पहला fo 70 है और पहला fe 80 है। अतः 70 में से 80 घटाने पर -10 प्राप्त हुआ जिसको पहला खाना के सामने नीचे लिख दिया गया है। इसी प्रकार दूसरा fo 50

तथा दूसरा fe 80 है इसलिए 50 में से 80 घटाने पर -30 बचा जिसको दूसरे खाना के नीचे लिखा गया है। तीसरा fo 120 तथा fe 80 है। इसलिए, 120 में से 80 घटाने पर 40 बचा जिसको तीसरा खाना के नीचे लिख दिया गया है।

(iv) चौथे चरण में $(fo-fe)^2$ निकाला जाता है। यहाँ प्रत्येक fo-fe का वर्ग कर दिया जाता है। दूसरे शब्दों में प्रत्येक fo में से fe को घटा कर उसका वर्ग कर दिया जाता है। जैसे- टेबुल 2 में fo-fe क्रमशः -10, -30 तथा 40 है, जिनका वर्ग करके क्रमशः 100, 900 तथा 1600 लिखा गया है।

(v) पाँचवें चरण में $\frac{(fo-fe)^2}{fe}$ निकाला जाता है। यहाँ प्रत्येक fo-fe के वर्ग को उसके fe से भाग दिया जाता है और जो भागफल होता है, उसको उसके सामने लिख दिया जाता है। जैसे - टेबुल 2 में पहला वर्ग

100 है, और इसका fe 80 है। इसलिए 100 को 80 से भाग देने पर 1.25 प्राप्त हुआ जिसको $\frac{(fo-fe)^2}{fe}$ के

सामने लिख दिया गया है। दूसरा वर्ग 900 तथा fe 80 है। इसलिए $\frac{(fo-fe)^2}{fe} = 11.25$ प्राप्त हुआ और इसी तरह

तीसरा वर्ग 1600 है, और fe 80 है। इसलिए, इसका $\frac{(fo-fe)^2}{fe} = 20$ प्राप्त हुआ।

(vi) अन्त में सभी $\frac{(fo-fe)^2}{fe}$ को एक साथ जोड़ दिया जाता है। यही योगफल काई-वर्ग

(χ^2) होता है। जैसे - टेबुल 2 से $1.25 + 11.25 + 20 = 32.5$ हुआ। अतः यही काई वर्ग हुआ।

काई-वर्ग की सार्थकता (Significance of Chi-Square)

काई-वर्ग की सार्थकता निर्धारित करने के लिए df निकालना पड़ता है। यहाँ $df = (r-1)(c-1)$ होता है। अतः प्रस्तुत उदाहरण में $df = (2-1)(3-1) \Rightarrow 1 \times 2 = 2$ अब काई-वर्ग टेबुल M (χ^2 table) से स्पष्ट है कि 2 df के साथ χ^2 को .05 तथा .01 स्तर पर सार्थक होने के लिए क्रमशः 5.99 तथा 9.21 चाहिए। हमारा प्राप्त χ^2 वास्तव में 32.5 है। अतः यह .01 स्तर से भी अधिक सार्थक है ($P < .01$)। इसका अर्थ यह हुआ कि हमारी शून्य परिकल्पना अस्वीकृत हो गयी और विकल्पी परिकल्पना (alternative hypothesis) स्वीकृत हो गयी। दूसरे शब्दों में यह प्रमाणित हो गया कि fo तथा fe के बीच जो अन्तर है वह वास्तविक है अर्थात् कारणवश है, संयोगवश नहीं है।

9.1.2 व्यक्तियों से यह प्रश्न पूछा गया “क्या आप वर्तमान राजनैतिक नेताओं की प्रतिष्ठा को दृष्टिपात करते हुए राजनीति में प्रवेश करना पसन्द करेंगे।” इस प्रश्न का उत्तर हमें इस प्रकार प्राप्त हुआ। 24 उत्तर पक्ष, 12 विपक्ष और 12 तटस्थ। इसका तात्पर्य यह है कि 24 व्यक्ति राजनीति में प्रवेश चाहते हैं, 12 बिल्कुल नापसन्द करते हैं, जबकि शेष उदासीन हैं। क्या यह प्राप्तांक सार्थक मत की ओर संकेत करते हैं। इस प्रश्न के समाधान के लिए अवलोकित आवृत्तियों के योग को वर्गों के अनुसार विभिन्न वर्गों में विभाजित कर दिया जायेगा। इस प्रकार हमें प्रत्याशित आवृत्तियाँ प्राप्त हो जायेंगी। अवलोकित आवृत्तियों और प्रत्याशित आवृत्तियों के अन्तर वर्ग मालूम करके प्रत्याशित आवृत्तियों से विभाजित करने पर प्राप्त भजनफल को जोड़ देंगे। भजनफलों का योग ही काई वर्ग है।

		पक्ष	तटस्थ	विपक्ष	योग
अवलोकित	(f _o)	24	12	12	48
प्रत्याशित	(f _e)	16	16	16	48
fo - fe		8	4	4	
(fo - fe) ²		64	16	16	

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e} \right)$$

$$4 \quad 1 \quad 1$$

$$\chi^2 = \sum \frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$$

$$= 6, p = .05$$

$$df = (r-1)(c-1) \Rightarrow (3-1)(2-1) \Rightarrow 2.$$

प्राप्त प्रदत्त और प्रत्याशित प्रदत्त में सार्थक अन्तर है और अन्तर का सार्थकता स्तर .05 है। क्योंकि .05 स्तर पर दिये गये तालिका-मूल्य से गणना-मूल्य अधिक है। इसलिए अमान्य परिकल्पना .05 स्तर पर अस्वीकृत होती है।

उपर्युक्त प्रदत्त पर χ^2 की गणना के लिए इस सूत्र का भी प्रयोग कर सकते हैं।

$$\chi^2 = \sum \frac{O^2}{E} - N$$

$$= \sum \left\{ \frac{(24)^2}{16} + \frac{(12)^2}{16} + \frac{(12)^2}{16} \right\} - 48 = 36 + 9 + 9 - 48 = 6$$

जब हमें समान सम्भाव्यता की अमान्य परिकल्पना पर प्रत्याशित आवृत्तियाँ प्राप्त करना होता है तो हम अवलोकित आवृत्तियों के योग को उतने ही भागों में विभाजित करते हैं जितने वर्गों में अवलोकित आवृत्तियों को दिया गया है। इस प्रकार प्रत्येक वर्ग के लिए अवलोकित आवृत्तियाँ मिल जाएंगी। इसके पश्चात् सूत्र का प्रयोग करेंगे और df ज्ञात करके परिशिष्ट में कोई वर्ग को दी हुई तालिका के द्वारा यह ज्ञात करेंगे कि कोई वर्ग का मूल्य किस सार्थकता स्तर (95% या 99%) पर सार्थक है।

9.1.3 निम्न प्रदत्तों से जनसंख्या में समान वितरण मानकर χ^2 की गणना कीजिये तथा इसकी सार्थकता का 0.01 स्तर पर परीक्षण कीजिये। Calculate χ^2 from the following data by assuming equal distribution in the population and test its significance at 0.01 level :

	A	B	C	D	E	F	Total
fo	15	30	25	15	10	25	120
fe	20	20	20	20	20	20	120
fo - fe	-5	10	5	-5	-10	5	
(fo - fe) ²	25	100	25	25	100	25	

$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$	1.25	5.00	1.25	1.25	5.00	1.25	
--------------------------	------	------	------	------	------	------	--

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(fo - fe)^2}{fe} \right)$$

$$\chi^2 = 1.25+5.00+1.25+1.25+5.00+1.25$$

$$\chi^2 = 15.00$$

गणना के चरण

सर्वप्रथम प्राप्त आवृत्तियों को प्रेक्षित आवृत्ति (f_o) माना गया तथा समान वितरण (Equal Distribution) के आधार पर प्रत्याशित आवृत्तियों (f_e) का निर्धारण किया गया। कुल आवृत्तियों के योग 120 (N) में कॉलम की संख्या (Number of Columns) 6 का भाग दिया (N/C) गया। इस प्रकार प्रत्येक कॉलम (column) की प्रत्याशित आवृत्ति 20 निर्धारित की गई। प्रत्येक कॉलम की प्रेक्षित आवृत्ति (f_o) में से प्रत्याशित आवृत्ति (f_e) को घटाकर ($f_o - f_e$) उसका वर्ग (square) कर दिया गया ($f_o - f_e$)²। प्राप्त वर्ग ($f_o - f_e$)² के मान में प्रत्याशित आवृत्ति (f_e) का भाग देकर

$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$ का मान ज्ञात किया गया। तत्पश्चात सभी मानों को जोड़कर χ^2 का मान प्राप्त किया।

स्वतंत्रता के अंश (d.f.) = (r-1) (c-1)

$$\begin{aligned} \text{d.f.} &= (2-1) (6-1) & r &= \text{rows (2)} \\ &= 1 \times 5 = 5 & c &= \text{columns (6)} \end{aligned}$$

r (rows) दो मानते हैं, प्रथम प्रेक्षित आवृत्ति (f_o) तथा द्वितीय प्रत्याशित आवृत्ति (f_e) C (columns) यहाँ वर्गों की संख्या 6 (A, B, C, D, E, F) मानेंगे।

सारणी के द्वारा d.f. 5 के आधार पर 0.05 स्तर पर सार्थक अन्तर के लिये आवृत्तक मान 11.07 अथवा उससे अधिक होना चाहिए। इसी प्रकार 0.01 स्तर पर सार्थक अन्तर के लिये कोई वर्ग (χ^2) का आवश्यक मान 15.086 अथवा अधिक होना चाहिये।

गणना द्वारा प्राप्त χ^2 का मान 15.00 है, जो कि 0.01 स्तर पर सार्थक अन्तर के लिये आवश्यक मान 15.086 से कम है, अतः 99 प्रतिशत विश्वास के स्तर पर सार्थक अन्तर नहीं है। परन्तु 0.05 स्तर पर सार्थक अन्तर के लिये आवश्यक मान 11.07 से अधिक χ^2 का मान 15.00 प्राप्त हुआ है, अतः प्रेक्षित आवृत्ति तथा प्रत्याशित आवृत्ति के मध्य 0.05 स्तर पर (95 प्रतिशत विश्वास) सार्थक अन्तर है। इस प्रकार यहाँ शून्य उपकल्पना निरस्त की जाती है।

5.1.4 बी.ए. प्रथम वर्ग के 50 विद्यार्थियों से विज्ञापन के प्रति अभिवृत्ति ज्ञात की गई। निम्नलिखित परिणामों के आधार पर कोई वर्ग (χ^2) की गणना कर सार्थक अन्तर बताइये।

	अत्यधिक सहमत (Strongly Agree)	सहमत (Agree)	तटस्थ (Neutral)	असहमत (Disagree)	अत्यधिक असहमत (Strongly Disagree)	योग (Total)
f_o	7	6	14	15	8	50
f_e	10	10	10	10	10	50
$f_o - f_e$	-3	-4	4	5	-2	
$(f_o - f_e)^2$	9	16	16	25	4	
$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$.90	1.60	1.60	2.50	.40	

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(fo - fe)^2}{fe} \right)$$

$$\chi^2 = .90 + 1.60 + 1.60 + 2.50 + .40$$

$$\chi^2 = 7.00$$

$$\begin{aligned} \text{d.f.} &= (r-1)(c-1) \\ &= (2-1)(5-1) \\ &= 1 \times 4 = 4 \end{aligned}$$

0.05 स्तर पर सार्थक अन्तर के लिये आवश्यक χ^2 का मान 9.488 अथवा अधिक होना चाहिए जबकि प्राप्त χ^2 का मान 7.00 इस आवश्यक मान से कम प्राप्त हुआ है, अतः विज्ञापन के प्रति विद्यार्थियों की अभिवृत्ति के मध्य 0.05 स्तर पर सार्थक अन्तर नहीं है। शून्य उपकल्पना स्वीकार की जाती है।

9.2 सामान्य वितरण परिकल्पना पर आधारित प्रश्न (Problems Based on Normal Distribution Hypothesis)

(जब पाँच श्रेणी में विभाजन हों)

5.2.1—200 विद्यार्थियों को एक मनोवृत्ति मापनी (Attitude scale) के भिन्न-भिन्न एकांशों (items) के प्रति अपनी प्रतिक्रिया (response) 5 विकल्पी उत्तरों अर्थात् पूरी स्वीकृति (Strongly approve) स्वीकृति (approve), अनिश्चित (undecided), अस्वीकृत (disapprove) तथा पूरी अस्वीकृत (strongly disapprove) में से किसी एक उत्तर को चिह्नित करके व्यक्त करने के लिए कहा गया। एकांश संख्या 10 के प्रति पहले, दूसरे, तीसरे, चौथे तथा पाँचवें विकल्पी उत्तरों को चिह्नित करने वाले विद्यार्थियों की संख्या टेबुल 1 में अंकित है। प्रश्न है कि पाँच श्रेणियों में विभाजित विद्यार्थियों की संख्या (बारंबारता) तथा प्रसामान्य वितरण (normal distribution) की अभिधारणा (assumption) पर आधारित प्रत्याशित संख्या या बारंबारता (expected frequencies) में कोई सार्थक अन्तर है या नहीं।

टेबुल - 1

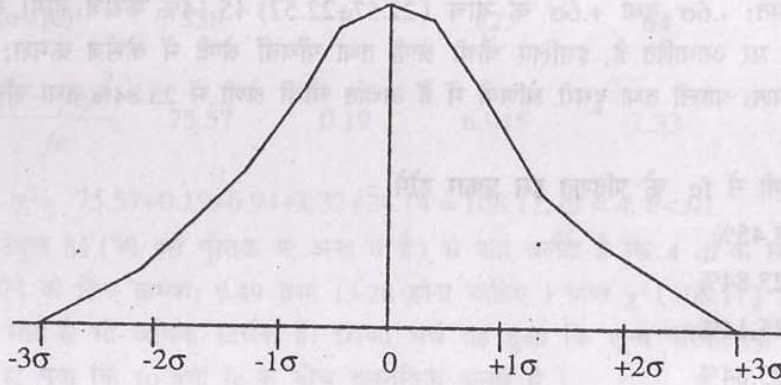
पूरी स्वीकृत (strongly Approve)	स्वीकृत (Approve)	अनिश्चित (Undecided)	अस्वीकृत (Disapprove)	पूरी अस्वीकृत (Strongly Disapprove)
30	45	65	40	20

ऊपर टेबुल-1 में 5 श्रेणियों में दी गयी विद्यार्थियों की संख्या या बारंबारता को f_o कहा जाएगा। अब प्रत्येक श्रेणी के f_e को ज्ञात किया जाएगा। इसके लिए निम्नलिखित बातों पर ध्यान दें -

(i) जितनी श्रेणियों में f_o विभक्त होता है, उतनी ही श्रेणियों में f_e को होना आवश्यक होता है। प्रस्तुत उदाहरण में f_o पाँच श्रेणियों में विभक्त है। इसलिए f_e को भी पाँच श्रेणियों में विभक्त किया जाएगा।

(ii) f_e ज्ञात करने का तरीका यह है कि प्रसामान्य वितरण के जेड प्राप्तांक (z score) जो 6 होता है, को दी गयी श्रेणियों की संख्या (number of given categories) से विभाजित कर दिया जाता है। स्मरण रखना चाहिए कि प्रसामान्य वितरण वक्र (normal distribution curve) की आधार-रेखा (base-line) 6 जेड प्राप्तांकों में बंटा होता

है - रेखा के मध्यबिन्दु से 3 जेड प्राप्तक ऊपर (यानी) और मध्यबिन्दु से 3 जेड प्राप्तक नीचे)। प्रस्तुत उदाहरण में दी गयी श्रेणियों की संख्या 5 है यानी 5 श्रेणियों में fo उपलब्ध है। इसलिए 6 जेड प्राप्तक को 5 से भाग देने 1.2 जेड प्राप्तक होगा । अतः प्रत्येक श्रेणी का मूल्य 1.2 जेड प्राप्तक होगा। अतः प्रत्येक श्रेणी का मूल्य 1.2 जेड प्राप्तक होगा ।



(iii) जेड प्राप्तक का प्रसार (Range of Z score) — इस चरण में प्रत्येक श्रेणी के जेड प्राप्तक के प्रसार को निर्धारित किया जाता है। आसानी के लिए सबसे पहले बीच वाली श्रेणी के जेड प्राप्तक का प्रसार निकाला जाता है। इस श्रेणी का आधा भाग प्रसामान्य वक्र (normal curve) की आधार-रेखा के मध्यबिन्दु से ऊपर तथा आधा भाग उसके नीचे होता है। प्रस्तुत उदाहरण में तीसरी श्रेणी बीच वाली श्रेणी है। इस श्रेणी का कुल जेड प्राप्तक 1.2 है। अतः इसका आधा यानी .6 मध्यबिन्दु के ऊपर तथा आधा यानी .6 नीचे होगा। इस प्रकार इस श्रेणी के जेड प्राप्तक का प्रसार -0.6σ से $+0.6\sigma$ तक होगा।

अब चौथी श्रेणी पर ध्यान दें। यह श्रेणी मध्य श्रेणी यानी तीसरी श्रेणी के बाद आती है और इसके जेड प्राप्तक (Z score) का मूल्य 1.2 है। यह मूल्य (1.2σ) मध्यबिन्दु के ऊपर (दाहिनी ओर) $.6\sigma$ के बाद से शुरू होगा । अतः इसके जेड प्राप्तक का प्रसार $+0.6\sigma$ से 1.8σ तक होगा। दूसरी श्रेणी के जेड प्राप्तक का प्रसार भी उतना ही होगा। अन्तर केवल इतना है कि यह श्रेणी आधार-रेखा के मध्यबिन्दु से नीचे (बायीं ओर) होगी अर्थात् -0.6σ से -1.8σ तक प्रसार होगा ।

अन्त में पाँचवी श्रेणी का जेड प्राप्तक भी $+1.2$ है और इसका आरंभ $+1.8\sigma$ से होगा। अतः इसके जेड प्राप्तक का प्रसार 1.8σ से 3σ तक होगा। ठीक इसी तरह पहली श्रेणी का प्रसार भी यही होगा। लेकिन वह मध्यबिन्दु के नीचे (बायीं ओर) होगा। अर्थात् उसका प्रसार -1.8σ से -3σ तक होगा।

संक्षेप में पाँचों श्रेणियों के जेड प्राप्तक के प्रसार इस प्रकार होंगे -

पहली श्रेणी = -3 से -1.8σ तक दूसरी श्रेणी = -1.8 से -0.6σ तक

तीसरी श्रेणी = -0.6 से $+0.6\sigma$ तक चौथी श्रेणी = $+0.6$ से $+1.8\sigma$ तक

पाँचवीं श्रेणी = $+1.8$ से $+3\sigma$ तक

(iv) चौथे चरण में प्रत्येक श्रेणी के जेड प्राप्तक (σ) को टेबुल (A) (जो इस पुस्तक के अन्त में है) के आधार पर केसेज (cases) या प्राप्तक के प्रतिशत (percentage) निकाले जाते हैं । जैसे - प्रस्तुत उदाहरण में पहली श्रेणी के जेड प्राप्तक का प्रसार -3σ से -1.8σ तक है। टेबुल से पता चलता है कि -3σ तथा मध्यबिन्दु के बीच .4986 अर्थात् 49.86% प्राप्तक है और 1.8σ तथा मध्यबिन्दु के बीच .4641 अर्थात् 46.41% केसेज

हैं। अतः -3σ तथा -1.8σ के बीच (49.86-46.41) 3.45% केसेज हैं। दूसरी श्रेणी के जेड प्राप्तांक का प्रसार -1.8σ से $-.6\sigma$ है। यहाँ मध्यबिन्दु से 1.8σ तक .4641 यानी 46.41% केसेज हैं तथा मध्यबिन्दु तथा $.6\sigma$ के बीच .2257 यानी 22.57% केसेज हैं। इसलिए -1.8σ तथा $-.6\sigma$ के बीच (46.41 - 22.57) 23.84% केसेज होंगे। तीसरी श्रेणी के जेड प्राप्तांक का प्रसार $-.6\sigma$ से $+.6\sigma$ तक है। टेबुल A से पता चलता है कि $-.6\sigma$ तथा आधार रेखा के मध्यबिन्दु के बीच .2257 यानी 22.57% केसेज और इसी प्रकार $+.6\sigma$ तथा मध्यबिन्दु के बीच 22.57% केसेज हैं। अतः $-.6\sigma$ तथा $+.6\sigma$ के बीच (22.57+22.57) 45.14% केसेज होंगे। चूँकि यह प्रसामान्य वितरण परिकल्पना पर आधारित है, इसलिए चौथी श्रेणी तथा पाँचवीं श्रेणी में केसेज क्रमशः उतने ही प्रतिशत होंगे, जितना कि क्रमशः पहली तथा दूसरी श्रेणियों में हैं अर्थात् चौथी श्रेणी में 23.84% तथा पाँचवीं श्रेणी में 3.45% केसेज होंगे।

संक्षेप में प्रत्येक श्रेणी में fe के प्रतिशत इस प्रकार होंगे -

पहली श्रेणी =	3.45%
दूसरी श्रेणी =	23.84%
तीसरी श्रेणी =	45.14%
चौथी श्रेणी =	23.84%
पाँचवीं श्रेणी =	3.45%
99.72 =	100%

(v) यदि सभी श्रेणियों के fo की कुल संख्या 100 हो तो बस चौथे चरण में ही काम समाप्त हो जाता है और प्रत्येक श्रेणी के प्रतिशत को fe मान लिया जाता है जिनकी कुल संख्या आवश्यक रूप से 100 होती है। लेकिन, यदि सभी श्रेणियों के fo की संख्या 100 से कम या अधिक हो तो प्रत्येक श्रेणी के प्रतिशत को 100 से भाग देकर fo की कुल संख्या से गुणा कर देने पर fe निकल आती है। जैसे- प्रस्तुत उदाहरण में पाँचों श्रेणियों के fo की कुल संख्या 200 है। अतः इन सभी श्रेणियों के केसेज के प्रतिशत को 200 विद्यार्थियों के रूप में इस प्रकार बदला जाएगा -

पहली श्रेणी =	$\frac{3.45}{100} \times 200 \Rightarrow 6.90$ or 7
दूसरी श्रेणी =	$\frac{23.84}{100} \times 200 \Rightarrow 47.68$ or 48
तीसरी श्रेणी =	$\frac{45.14}{100} \times 200 \Rightarrow 90.28$ or 90
चौथी श्रेणी =	$\frac{23.84}{100} \times 200 \Rightarrow 47.68$ or 48
पाँचवीं श्रेणी =	$\frac{3.45}{100} \times 200 \Rightarrow 6.90$ or 7

fe ज्ञात कर लेने के बाद टेबुल के आँकड़ों से काई-वर्ग (χ^2) इस प्रकार निकाला जाएगा-

पूरी	स्वीकृत	अनिश्चित	अस्वीकृत	पूरी	योग
स्वीकृत	(Approve)	(Undecided)	(Disapprove)	अस्वीकृति	(Total)

	(Strongly Approve)			(Strongly Disapprove)		
fo	30	45	65	40	20	200
fe	7	48	90	48	7	200
fo - fe	23	-3	-25	-8	13	
(fo - fe) ²	529	9	625	64	169	
$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$	75.57	0.19	6.945	1.33	24.14	

$$\therefore \chi^2 = 75.57 + 0.19 + 6.94 + 1.33 + 24.14 = 108.17, df = 4, P < .01$$

टेबुल M (जो इस पुस्तक के अन्त में है) से पता चलता है कि 4 df के साथ χ^2 को .05 तथा .01 पर सार्थक होने के लिए क्रमशः 9.49 तथा 13.28 होना चाहिए। प्राप्त χ^2 (108.17) इससे बहुत अधिक है। अतः यह .01 स्तर से भी अधिक सार्थक है। इसका अर्थ यह हुआ कि शून्य परिकल्पना अस्वीकृत हो गयी और यह प्रमाणित हो गया कि fo तथा fe के बीच वास्तविक अन्तर है।

9.3 सामान्य वितरण पर आधारित प्रश्न (जब तीन श्रेणी में विभाजन हो) (When Divisions are in three categories)

5.3.1—एक सुन्दरता प्रतियोगिता में 100 छात्रों को निर्णायकों (judges) ने तीन श्रेणियों अर्थात् औसत से ऊपर (above average), औसत (average) तथा औसत से नीचे (below average) में विभाजित किया। आँकड़े नीचे टेबुल में दिए गए हैं। प्रश्न यह है कि यदि सुन्दरता के शीलगुण में प्रसामान्य वितरण (normal distribution) की विशेषता मान लिया जाए तो क्या निर्णायकों द्वारा छात्रों का विभाजन प्रत्याशित विभाजन (expected distribution) से भिन्न है?

टेबुल			
औसत से ऊपर (Above Average)	औसत (Average)	औसत से नीचे (Below Average)	
23	40	37	100

उपर्युक्त तीन श्रेणियों में छात्रों की संख्या को fo माना जाएगा और प्रत्येक श्रेणी के लिए fe को उसी तरह से निकाला जाएगा, जैसा कि उदाहरण संख्या एक में निकाला गया है। अन्तर केवल इतना है कि यहाँ श्रेणियों की संख्या 3 है। अतः प्रसामान्य वितरण वक्र की आधार-रेखा की कुल लम्बाई यानी 6σ को 3 से भाग देने पर 2σ भागफल होगा। अतः प्रत्येक श्रेणी का जेड प्राप्तांक (Z score) 2σ होगा। तीन श्रेणियों के जेड प्राप्तांक का प्रसार इस प्रकार होगा -

पहली श्रेणी = -3σ से -1σ तक, दूसरी श्रेणी = -1σ से $+1\sigma$ तक

तीसरी श्रेणी = $+1\sigma$ से $+3\sigma$ तक

अब तीन श्रेणियों के जेड मूल्य को Z-Table की सहायता से प्रतिशत (percentage) में इस प्रकार बदला जाएगा -

पहली श्रेणी : टेबुल के अनुसार प्रसामान्य वक्र के मध्यबिन्दु से -3σ तक प्रतिशत (percentage) = 49.86, फिर मध्यबिन्दु से -1σ तक प्रतिशत = 34.13

\therefore पहली श्रेणी में = $49.86 - 34.13 = 15.3\%$ या 16% कसेज होंगे।

दूसरी श्रेणी : मध्यबिन्दु से -1σ तक प्रतिशत (percentage) = 34.13,

फिर मध्यबिन्दु से $+1\sigma$ तक प्रतिशत = 34.13

\therefore इस श्रेणी में = 34.13% + 34.13% = 68.26% या 68% केसेज होंगे ।

तीसरी श्रेणी : प्रसामान्य वक्र के मध्यबिन्दु से $+1\sigma$ तक प्रतिशत (percentage) = 34.13%,

फिर मध्यबिन्दु से 3σ तक प्रतिशत = 49.86%

\therefore इस श्रेणी (जिसका मूल्य 2σ है) = 49.86% - 34.13 = 15.73% या 16% केसेज होंगे ।

चूँकि यहाँ तीन श्रेणियों के f_o की कुल संख्या 100 है, इसलिए प्रत्येक श्रेणी के लिए प्राप्त प्रतिशत ही f_e होगा और टेबुल से काई-वर्ग इस प्रकार ज्ञात किया जाएगा -

f_o	23	40	37	100
f_e	16	68	16	100
$f_o - f_e$	7	-28	21	
$(f_o - f_e)^2$	49	784	441	
$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$	3.06	11.53	27.56	

$$\therefore \chi^2 = 3.06 + 11.5 + 27.56 = 42.15,$$

$$df = 2, \quad P < .01$$

काई-वर्ग टेबुल M को देखने से पता चलता है कि 2df पर .05 तथा .01 स्तरों पर काई-वर्ग को सार्थक होने के लिए क्रमशः 5.99 तथा 9.21 होना चाहिए। प्राप्त काई-वर्ग ($\chi^2 = 42.15$) इससे बहुत ज्यादा है। अतः यह .01 स्तर से भी अधिक सार्थक है। इसका अर्थ यह हुआ कि हमारी यह शून्य परिकल्पना (null hypothesis) कि f_o तथा f_e के बीच कोई वास्तविक अंतर नहीं है, अस्वीकृत (reject) हो गयी और विकल्पी परिकल्पना (alternative hypothesis) स्वीकृत (accept) हो गयी कि f_o तथा f_e में वास्तविक अंतर है। अतः छात्राओं की सुन्दरता के सम्बन्ध में निर्णायकों के निर्णय तथा प्रत्याशित निर्णय के बीच कोई तालमेल नहीं है। हमारे इस निष्कर्ष के सही होने की संभावना 99% तथा गलत होने की संभावना केवल 1% है।

9.3.2— एक आविष्कारिका (inventory) के एकांश 15 के प्रति 150 छात्रों में से 10 ने सहमति (Agree), 28 ने तटस्थ (Neutral) तथा 12 ने असहमति (Disagree) के पक्ष में अपना निर्णय दिया। अब प्रश्न यह है कि प्रसामान्य वितरण परिकल्पना (Normal Distribution Hypothesis) पर आधारित प्रत्याशित बारंबारता (f_e) तथा टेबुल के f_o के बीच कोई सार्थक अंतर है या नहीं।

टेबुल

सहमति (Agree)	तटस्थ (Neutral)	असहमति (Disagree)
10	28	12
		50

चूँकि यहाँ श्रेणियों की संख्या 3 है। इसलिए 6σ को 3 से भाग देने पर $\left(\frac{6}{3}\right) = 2$ जेड प्राप्तांक भागफल

हुआ। अतः प्रत्येक श्रेणी का जेड मूल्य (Z value) 2 हुआ। इसलिए इन तीनों श्रेणियों में Z-table के आधार पर केसेज के निम्नलिखित प्रतिशत होंगे -

(i) पहली श्रेणी (First Category) का Z मूल्य 2 है, जो -3σ से -1σ के बीच पड़ता है। अब टेबुल - A से पता चलता है कि प्रसामान्यता वक्र के मध्यबिन्दु तथा -3σ के बीच 49.86% कसेज पड़ते हैं और वक्र के मध्यबिन्दु तथा -1σ के बीच 34.13% कसेज पड़ते हैं। इसलिए पहली श्रेणी में $49.86\% - 34.13\% = 15.73\%$ या 16% कसेज पड़ेंगे।

(ii) दूसरी श्रेणी का Z मूल्य 2 है, जो मध्य श्रेणी (Middle Category) होने के कारण 1σ मध्यबिन्दु से नीचे तथा 1σ मध्यबिन्दु से ऊपर है। अब टेबुल - A को देखने से पता चलता है कि वक्र के मध्यबिन्दु तथा -1σ के बीच 34.13% कसेज पड़ते हैं और इसी तरह मध्यबिन्दु तथा $+1\sigma$ के बीच 34.13% कसेज पड़ते हैं। इसलिए, दूसरी श्रेणी में $34.13\% + 34.13\% = 68.26\%$ या 68% कसेज पड़ेंगे।

(iii) तीसरी श्रेणी का Z मूल्य 2 है, जो $+1\sigma$ से $+3\sigma$ के बीच पड़ता है। अब टेबुल A के अनुसार वक्र के केन्द्र यानी मध्यबिन्दु से $+1\sigma$ तक 34.13% कसेज पड़ते हैं और मध्यबिन्दु से $+3\sigma$ तक 49.86% कसेज पड़ते हैं। इसलिए, तीसरी श्रेणी में $49.86\% - 34.13\% = 15.73\%$ या 16% कसेज पड़ेंगे।

चूँकि प्रस्तुत उदाहरण में तीनों श्रेणियों के f_o की कुल संख्या 50 है। इसलिए उपर्युक्त प्रतिशतों (percentages) को निम्नलिखित तरीके से 50 बारंबारताओं में बदला जाएगा -

$$\text{पहली श्रेणी} = \frac{16}{100} \times 50 \Rightarrow 8$$

$$\text{दूसरी श्रेणी} = \frac{68}{100} \times 50 \Rightarrow 34$$

$$\text{तीसरी श्रेणी} = \frac{16}{100} \times 50 \Rightarrow 8$$

अब टेबुल से काई-वर्ग इस प्रकार ज्ञात किया जाएगा -

	सहमत (Agree)	तटस्थ (Neutral)	असहमत (Disagree)	कुल (Total)
f_o	10	28	12	50
f_e	8	34	8	50
$f_o - f_e$	2	-6	4	
$(f_o - f_e)^2$	4	36	16	
$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$	0.5	1.06	2	

$$\therefore \chi^2 = 0.50 + 1.06 + 2.00 \Rightarrow 3.56,$$

$$df = 2, \quad P > .05$$

χ^2 तालिका-M (अन्तिम अध्याय) से स्पष्ट है कि 2 df पर .05 तथा .01 स्तरों पर χ^2 को सार्थक होने के लिए क्रमशः 5.99 तथा 9.21 होना चाहिए। लेकिन, प्राप्त χ^2 (3.56) इससे बहुत कम है। अतः यह

.05 स्तर पर भी सार्थक नहीं है। इसका अर्थ यह हुआ कि शून्य परिकल्पना स्वीकृत हो गयी। वास्तव में f_o तथा f_e के बीच कोई वास्तविक अन्तर नहीं है।

5.2.1—पठित विषयों के बारे में 300 शिक्षकों ने विपत्र भरे। जांच के आधार पर उसे तीन श्रेणियों में बांट दिया गया। क्या ये सामान्य वितरण की परिकल्पना पर आधारित अनुमानित आवृत्तियों से अलग है ?

संतोषजनक	सामान्य	असंतोषजनक
75	185	40

यहाँ अवलोकित आवृत्तियाँ तीन श्रेणियों में विभक्त है। सामान्य वितरण वक्र के अनुसार प्रथम श्रेणी में 100 में 16, द्वितीय श्रेणी में 100 में 68 तथा तृतीय श्रेणी में 100 में 16 पद (cases) पड़ते हैं। प्रथम श्रेणी में $16 \times 300/100 = 48$, द्वितीय श्रेणी में $68 \times 300/100 = 204$ और तृतीय श्रेणी में $16 \times 300/100 = 48$ पद होंगे।

अवलोकित आवृत्ति से सामान्य वितरण सिद्धांत के अनुसार अनुमानित आवृत्ति का परिकलन करने के बाद Chi-Square इस प्रकार निकालते हैं -

	संतोषजनक	सामान्य	असंतोषजनक	
f_o	75	185	40	300
f_e	48	204	48	300
$f_o - f_e$	27	-19	-8	
$(f_o - f_e)^2$	729	361	64	
$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$	15.1875	1.7696	1.3333	

$$\therefore \chi^2 = 15.1875 + 1.7696 + 1.3333 \Rightarrow 18.29$$

व्याख्या —

यहाँ पंक्ति एक ही है, इसलिए df में (r-1) नहीं होगा। χ^2 -तालिका M के अनुसार, df=3-1 या 2 पर χ^2 को सार्थक होने के लिए अपेक्षित मान .05 और .01 विश्वास-स्तर पर क्रमशः 5.991 और 9.210 होना चाहिए। यहाँ Chi-Square का मान 18.29 है। यह मान .01 विश्वास स्तर के ऊपर भी सार्थक है। अतः निष्कर्षस्वरूप हम कह सकते हैं कि सामान्य वितरण की परिकल्पना, जो शून्य परिकल्पना की जगह पर है, अस्वीकृत हुई और प्राप्त काई-वर्ग के अनुसार विपत्र संबंधी उपर्युक्त उदाहरण की आवृत्तियाँ सामान्य रूप से वितरित नहीं है।

9.2.2—250 शिक्षकों द्वारा विपत्र भरे गए, जांच के परिणामस्वरूप इसे पांच श्रेणियों में बांट दिया गया। निम्नांकित आँकड़ों के आधार पर सामान्य वितरण की परिकल्पना की जांच करें।

पूर्ण संतोषजनक	संतोषजनक	सामान्य	असंतोषजनकपूर्ण	असंतोषजनक	
20	65	100	50	15	250

पूर्व में सामान्य वितरण के आधार पर पांच भागों में बांटा जा चुका है। उसी के अनुसार -

$$\text{प्रथम श्रेणी} = \frac{3.5 \times 250}{100} \Rightarrow 8.75$$

$$\text{द्वितीय श्रेणी} = \frac{24 \times 250}{100} \Rightarrow 60$$

$$\text{तृतीय श्रेणी} = \frac{45 \times 250}{100} \Rightarrow 112.5$$

$$\text{चतुर्थ श्रेणी} = \frac{24 \times 250}{100} \Rightarrow 60$$

$$\text{पंचम श्रेणी} = \Rightarrow 8.75$$

	पूर्ण संतोषजनक	संतोषजनक	सामान्य	असंतोषजनकपूर्ण	असंतोषजनक	
f_o	20	65	100	50	15	250
f_e	8.75	60	112.5	60	8.75	250
$f_o - f_e$	11.25	5	-12.5	-10	6.25	
$(f_o - f_e)^2$	126.5625	25	156.25	100	39.0625	
$\frac{(f_o - f_e)^2}{f_e}$	14.4623	.4167	1.3889	1.6667	4.4643	

$$\therefore \chi^2 = 14.4623 + .4167 + 1.3889 + 1.6667 + 4.4643 \Rightarrow 22.3989 = 22.399$$

व्याख्या — यहाँ $df = c - 1 = 5 - 1 = 4$ होगा। χ^2 की तालिका M से स्पष्ट है कि इसे सार्थक होने के लिए अपेक्षित मान $df=4$ पर .05 तथा .01 विश्वास स्तर पर क्रमशः 9.49 तथा 13.28 है। परिकलन से प्राप्त χ^2 का मान 22.399 है जो .01 विश्वास-स्तर के मान से बहुत अधिक है। यह परिकल्पना कि अवलोकित आवृत्ति तथा सामान्य वितरण के आधार पर प्राप्त किए हुए अनुमानित आवृत्ति में कोई अन्तर नहीं है या अन्तर शून्य है, अस्वीकृत हुई। अतः हम कह सकते हैं कि प्राप्त आंकड़े सामान्य रूप से वितरित नहीं है।

9.2.3—विद्यालय के 500 विद्यार्थियों पर सामूहिक बुद्धि परीक्षण प्रशासित किया गया तथा निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए। क्या सामान्य सम्भाव्यता वितरण के अनुरूप परिणाम प्राप्त हुए हैं? कोई-वर्ग की गणना द्वारा जांच कीजिये।

मन्दबुद्धि	औसत से निम्न बुद्धि	औसत बुद्धि	औसत से अधिक बुद्धि	प्रखर बुद्धि
20	105	250	101	24

हल :

सर्वप्रथम उपर्युक्त पाँच वर्गों में विभक्त प्रेक्षित आवृत्ति के आधार सामान्य सम्भाव्यता वक्र को निर्मित कर प्रत्येक उपसमूह के निर्धारित प्रतिशत को ज्ञात करेंगे। कुल 500 विद्यार्थियों के आधार पर निर्धारित प्रतिशत द्वारा प्रत्येक उपसमूह में स्थित विद्यार्थियों की संख्या प्रत्याशित आवृत्तियों के रूप में ज्ञात करेंगे। इस प्रकार प्राप्त प्रत्याशित आवृत्तियों के आधार पर कोई वर्ग की गणना करते हैं।

पाँच उपसमूहों में सामान्य वितरण को विभक्त करना है, अतः प्रत्येक उपसमूह का विस्तार $6/5=1.20Z$ मूल्य है। इस आधार पर -

$$\text{उपसमूह A का विस्तार } -3 \text{ से } -1.80 \text{ तक } (50-46.41\%) = 3.59\%$$

$$\text{उपसमूह B का विस्तार } -1.80 \text{ से } -.60 \text{ तक } (46.41-22.57\%) = 23.84\%$$

$$\text{उपसमूह C का विस्तार } -.60 \text{ से } +.60 \text{ तक } (22.57+22.57) = 45.14\%$$

उपसमूह D का विस्तार +.60 से रु +1.80 तक $(46.41-22.57) = 23.84\%$

उपसमूह E का विस्तार +1.80 से रु +3.00 तक $(50-46.41\%) = 3.59\%$

प्रत्येक उपसमूह के प्रतिशत के आधार पर निम्नलिखित सूत्र द्वारा उपसमूह की संख्या ज्ञात कर सकते हैं

विद्यार्थियों की संख्या = उपसमूह का प्रतिशत x कुल विद्यार्थियों की संख्या

100

मन्द बुद्धि विद्यार्थियों की संख्या (उपसमूह A)

$$= \frac{3.59\% \times 500}{100} = 17.95 \Rightarrow 18$$

औसत से निम्न बुद्धि विद्यार्थियों की संख्या (उपसमूह B)

$$= \frac{23.84\% \times 500}{100} \Rightarrow 119.20 \Rightarrow 119$$

औसत बुद्धि के विद्यार्थियों की संख्या (उपसमूह C)

$$= \frac{45.14\% \times 500}{100} \Rightarrow 225.70 \Rightarrow 226$$

औसत से अधिक बुद्धि के विद्यार्थियों की संख्या (उपसमूह D)

$$= \frac{23.84\% \times 500}{100} \Rightarrow 119.20 \Rightarrow 119$$

प्रखर बुद्धि के विद्यार्थियों की संख्या (उपसमूह E)

$$= \frac{3.59\% \times 500}{100} \Rightarrow 17.95 \Rightarrow 18$$

कुल विद्यार्थी = 500

काई वर्ग (χ^2) की गणना

	मन्दबुद्धि	औसत से निम्न बुद्धि	औसत बुद्धि	औसत से अधिक बुद्धि	प्रखर बुद्धि	योग
fo	20	105	250	101	24	500
fe	18	119	226	119	18	500
fo - fe	2	-14	24	-18	6	
(fo - fe) ²	4	196	576	324	36	
$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$.22	1.65	2.55	2.72	2.00	

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(fo - fe)^2}{fe} \right)$$

$$\chi^2 = .22 + 1.65 + 2.55 + 2.72 + 2.00$$

$$\chi^2 = 9.14$$

(0.05 स्तर पर सार्थक अन्तर नहीं)

$$\text{d.f.} = (r-1)(c-1)$$

$$= (2-1)(5-1)$$

$$= 1 \times 4 = 4$$

4 d.f. के आधार पर कोई वर्ग सारणी M का अवलोकन करने से ज्ञात हुआ कि 0.05 स्तर पर सार्थक अन्तर के लिये आवश्यक χ^2 का मान 9.488 अथवा इससे अधिक होना चाहिये, जबकि प्राप्त χ^2 का मान 9.14 इस आवश्यक मान से कम प्राप्त हुआ है। इस प्रकार प्रेक्षित आवृत्ति को सामान्य सम्भाव्यता वितरण की उपकल्पना पर आधारित प्रत्याशित आवृत्ति के समान माना जा सकता है तथा शून्य उपकल्पना को स्वीकार किया जाता है।

5.3.4—एक विशेष ब्राण्ड की चाय के प्रति 50 व्यक्तियों की अभिवृत्ति का अध्ययन कर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए। सामान्य वितरण मानते हुए कोई वर्ग की गणना कीजिये।

सहमत (Agree)	तटस्थ (Neutral)	असहमत (Disagree)	योग Total
12	24	14	50

हल

सर्वप्रथम एक सामान्य वितरण (Normal Distribution) को तीन उपसमूह में विभक्त कर प्रत्येक उपसमूह का प्रतिशत निर्धारित करेंगे। प्रत्येक उपसमूह के प्रतिशत के आधार पर प्रत्याशित आवृत्ति निर्मित करेंगे।

$$\text{उपसमूह A का विस्तार } -3 \text{ से } -1 \text{ तक } (50-34.13) = 15.87\%$$

$$\text{उपसमूह B का विस्तार } -1 \text{ से } +1 \text{ तक } (34.13+34.13\%) = 68.26\%$$

$$\text{उपसमूह C का विस्तार } +1 \text{ से } +3 \text{ तक } (50-34.13) = 15.87\%$$

$$\text{A असहमत व्यक्तियों की संख्या} = \frac{15.87\% \times 50}{100} \Rightarrow 7.93 \Rightarrow 8$$

$$\text{B तटस्थ व्यक्तियों की संख्या} = \frac{68.26\% \times 50}{100} \Rightarrow 34.13 \Rightarrow 34$$

$$\text{C सहमत व्यक्तियों की संख्या} = \frac{15.87\% \times 50}{100} \Rightarrow 7.93 \Rightarrow 8$$

$$\text{कुल व्यक्ति} = 50$$

काई वर्ग (χ^2) की गणना

	सहमत	तटस्थ	असहमत	योग
fo	12	24	14	50
fe	8	34	8	50
fo - fe	4	-10	6	
(fo - fe) ²	16	100	36	
$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$	2.00	2.94	4.50	

$$\chi^2 = \sum \left(\frac{(fo - fe)^2}{fe} \right)$$

$$\chi^2 = 2.00 + 2.94 + 4.50$$

$$\chi^2 = 9.44$$

2df के आधार पर सारणी M के अनुसार

$$\begin{aligned} \text{d.f.} &= (r-1)(c-1) && 0.05 & 5.99 \\ &= (2-1)(3-1) && 0.01 & 9.21 \\ &= 1 \times 2 = 2 \end{aligned}$$

2 d.f. के आधार पर तालिका M का निरीक्षण करने से स्पष्ट है कि 0.01 स्तर पर सार्थक अन्तर के लिये कोई वर्ग (χ^2) का आवश्यक मान 9.21 अथवा इस मान से अधिक होना चाहिए। गणना द्वारा प्राप्त कोई वर्ग (χ^2) का मान इस आवश्यक मान से अधिक 9.44 प्राप्त हुआ है, अतः व्यक्तियों की अभिवृत्ति (प्रेक्षित आवृत्ति) तथा सामान्य सम्भाव्यता वितरण की उपकल्पना पर आधारित प्रत्याशित अभिवृत्ति के मध्य सार्थक रूप से 0.01 स्तर पर भिन्नता है। शून्य उपकल्पना को अस्वीकार किया जाता है।

9.4 जब आँकड़े वर्गान्तर तथा बारंबारता के रूप में होते हैं (When data are in the form of class intervals and frequencies)

जब आँकड़े वर्गान्तर तथा बारंबारता के रूप में होते हैं अथवा इस प्रकार के आँकड़े होते हैं कि उन्हें वर्गान्तरों तथा बारंबारताओं में सजाना संभव हो तो ऐसी स्थिति में fe निकालने का तरीका भिन्न होता है। इसे एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है।

5.4.1—अनियमित रूप से (randomly) चुने गए 40 छात्रों पर एक उपलब्धि परीक्षण (achievement test) का उपयोग किया गया। उसके प्राप्तांकों (scores) का वितरण नीचे टेबुल में दिया गया है, जो प्रसामान्य वितरण परिकल्पना (normal distribution hypothesis) पर आधारित है। अब प्रश्न है कि टेबुल 50 की बारंबारता (fo) तथा प्रत्याशित बारंबारता (fe) के बीच कोई सार्थक अन्तर है?

टेबुल- 1

वर्गान्तर (Class intervals)	बारंबारता (Frequency)
80 - 84	1
75 - 79	2
70 - 74	5
65 - 69	8
60 - 64	9
55 - 59	7
50 - 54	5
45 - 49	2
40 - 44	1
	N = 40

यहाँ पर निकालने के लिए टेबुल- 1 में दिखलाए गए चरणों (steps) पर ध्यान दिया जा सकता है-

टेबुल - 2

वर्गान्तर (Class internals)	बारंबारता (f)	X (Mid point)	कल्पित विचलन x'	fx'	fx'2	वास्तविक विचलन (X-M)	जेड प्राप्तांक (Z score)	Cumulative Proportion (P)	Cumulative frequency (P x N)	fe
80-84	1	82	4	4	16	19.87	2.27	.9884	39.54	1.32
75-79	2	77	3	6	18	14.87	1.71	.9554	38.22	3.39
70-74	5	72	2	10	20	9.87	1.13	.8708	34.83	6.34
65-69	8	67	1	8	8	4.87	.56	.7123	28.49	8.65
				+28						
66-64	9	62	0	0	0	-.13	-.01	.4960	19.84	8.74
55-59	7	57	-1	-7	7	-5.3	-.59	.2776	11.10	6.18
50-54	5	52	-2	-10	20	-10.13	-1.16	.1230	4.92	3.25
45-49	2	47	-3	-6	18	-15.13	-1.73	.0418	1.67	1.24
40-44	1	42	-4	-4	16	-20.13	-2.30	-.107	.43	.43

N=40

-27 $\Sigma fx'^2$ -123

$\Sigma fe=39.54$

Mean=62.13

SD=8.75

$$Mean = Am + Ci$$

$$= 62 + \frac{1}{40} \times 5 = 62 + .13 = 62.13$$

$$SD = i \sqrt{\frac{fx'}{N} - C^2} = 5 \sqrt{\frac{123}{40} - (.03)^2}$$

$$= 53.07 - 0 = 5 \times 1.75$$

$$= 8.75$$

परिकलन में निहित चरण (Steps Involved in Calculation)

टेबुल-1 के परिकलन में निम्नलिखित चरण निहित हैं -

1. सबसे पहले बर्गान्तरों तथा बारंबारताओं को उसी रूप में लिखा जाता है, जिस रूप में वे दिए गए होते हैं। यह बात कॉलम 1 से 2 से स्पष्ट है।
2. उसके बाद वितरण का मध्यमान या माध्य (Mean) तथा मानक विचलन (SD) निकाला जाता है। यह बात कॉलम 3, 4, 5 तथा 6 से स्पष्ट है। यहाँ मध्यमान या माध्य 62.13 तथा मानक विचलन 8.75 पाया गया।
3. वास्तविक मध्यमान को मध्यबिन्दु (X) से घटाकर विचलन (deviation) निकाला जाता है, जैसा कि कॉलम 7 से स्पष्ट है।
4. फिर जेड प्राप्तांक (Z score) निकाला जाता है। इसके लिए सूत्र का व्यवहार किया जाता है। प्रत्येक

विचलन (x) को मानक विचलन (SD) से भाग देने पर जेड प्राप्तांक (Z score) निकल आता है। जैसे- टेबुल-2 के कॉलम 8 का पहला जेड प्राप्तांक 2.27 है। कॉलम 7 में पहला विचलन 19.87 है, जिसको मानक विचलन यानी 8.75 से भाग देने पर यह जेड प्राप्तांक 2.27 निकाला है। इसी तरह से प्रत्येक विचलन को मानक विचलन (SD) से भाग देकर जेड प्राप्तांक निकाला गया है।

5. जेड प्राप्तांक में संचयी समानुपात (cumulative proportion) निकाला जाता है जो कॉलम 9 से स्पष्ट है। इसके लिए Z टेबुल N का व्यवहार किया जाता है। धनात्मक जेड प्राप्तांक (+Z score) होने पर बड़े अंश (larger portion) तथा ऋणात्मक जेड प्राप्तांक (-Z score) होने पर छोटे अंश (smaller portion) के क्षेत्र में देखकर संचयी समानुपात निकाला जाता है। जैसे- टेबुल-1 के कॉलम 8 का पहला जेड प्राप्तांक (नीचे से) -2.30 है। Z-Table N के छोटे अंश के क्षेत्र में इसका समानुपात .0107 है जिसे कॉलम 9 में लिखा गया है। इसी प्रकार सबसे अंतिम (सबसे ऊपर) वाला जेड प्राप्तांक +2.27 है, जिसको Z-टेबुल N के बड़े अंश के क्षेत्र में देखने पर .9884 समानुपात पाया गया, जिसको कॉलम 9 में लिखा गया है। इसी प्रकार दूसरे सभी संचयी समानुपात निकाले गए हैं।

6. इसके बाद संचयी बारंबारता (cumulative frequency) को निकाला जाता है, जो कॉलम 10 में लिखा गया है। प्रत्येक समानुपात (P) को बारंबारता की संख्या (N) से गुणा कर देने पर संचयी बारंबारता निकल आती है। जैसे - कॉलम 9 का पहला संचयी समानुपात (नीचे से) .0107 है, जिसको N यानी 40 से गुणा करने पर .43 संचयी बारंबारता हुई जिसको कॉलम 10 में लिखा गया है। इसी तरह दूसरी सभी संचयी बारंबारताओं को निकाला गया है।

7. अन्त में fe निकाला जाता है। इसका तरीका यह है कि नीचे से जो पहली संचयी बारंबारता होती है, वही उसका fe भी होता है। जैसे, कॉलम 10 में पहली (नीचे से) संचयी बारंबारता .43 है। कॉलम 11 में इसे ही fe मानकर लिखा गया है। इसके बाद संचयी बारंबारता को ठीक उसके ऊपर वाली बारंबारता से घटा लेने पर जो बचता है, वही fe होता है। जैसे दूसरी संचयी बारंबारता (नीचे से) 1.67 है, जिसमें से पहली संचयी बारंबारता यानी .43 घटाने पर 1.24 बचा जिसको fe के खाने में लिखा गया है। इसी तरह तीसरी संचयी बारंबारता यानी 4.92 में से दूसरी संचयी बारंबारता यानी 1.67 घटाने पर 3.25 बचा जिसको fe के खाने में लिखा गया है। इसी प्रकार प्रत्येक संचयी बारंबारता को fe में बदल दिया जाता है।

यहाँ यह भी स्मरण रखना चाहिए कि fe यदि 5 से कम होता है उसे एक साथ मिला दिया जाता है। ऐसा करने से fe 5 या इससे अधिक हो जाता है। इसके बाद काई-वर्ग का जो सूत्र है, उसकी सहायता से काई-वर्ग ज्ञात किया जाता है। इसे नीचे के टेबुल में दिखलाया गया है -

वर्गान्तर (Class intervals)	बारंबारता (Frequency)	fe	fo	fe
80 - 84	1	1.32		
75 - 79	2	3.39		
70 - 74	5	6.34	8	11.05
65 - 69	8	8.65	8	8.65
60 - 64	9	8.74	9	8.74
55 - 59	7	6.18	15	11.10
50 - 54	5	3.25		
45 - 49	2	1.24		
40 - 44	1	.43		

अब टेबुल में सजाने पर fo तथा fe इस प्रकार होगा -

fo	8	8	9	15
fe	11.05	8.65	8.74	11.10
fo - fe	3.05	-.65	.26	3.90
(fo - fe) ²	9.30	.42	.07	15.21
$\frac{(fo - fe)^2}{fe}$.84	.05	.01	1.37

$$\therefore \chi^2 = .84 + .05 + .01 + 1.37 \Rightarrow 2.27$$

df निकालने का तरीका थोड़ा भिन्न होता है। यहाँ श्रेणियों की संख्या (no. of categories) में से 3 घटा देने पर जो कुछ बचता है, वही df होता है। यहाँ श्रेणियों की कुल संख्या 4 है। अतः df=4-3=1 काई वर्ग टेबुल M से पता चलता है कि 1 df पर .05 तथा स्तरों पर को सार्थक होने के लिए क्रमशः 3.84 तथा 6.64 कम से कम चाहिए।

प्राप्त (2.27) इससे कम है। अतः सार्थक नहीं है। इसलिए शून्य परिकल्पना स्वीकृत हो गयी कि fo तथा fe के बीच कोई वास्तविक अन्तर नहीं है। इसका मतलब यह भी हुआ कि टेबुल-50 के बारंबारता-वितरण में प्रसामान्यता का अभाव है।

इस प्रकार स्पष्ट हो जाता है कि काई-वर्ग (chi-square) का उपयोग कई परिस्थितियों में देखा जाता है, जैसा कि ऊपर की बातों से स्पष्ट है।

5.4.2 — छात्रों पर बुद्धि परीक्षण प्रशासित किया गया। प्राप्त आवृत्ति वितरण इस प्रकार है -

टेबुल - 1

वर्गान्तर	आवृत्ति
60 - 64	2
55 - 59	5
50 - 54	10
45 - 49	25
40 - 44	20
35 - 39	18
30 - 34	10
25 - 29	8
20 - 24	2

N = 100

क्या अवलोकित आवृत्तियों और प्रत्याशित आवृत्तियों में सार्थक अन्तर है?

$$M = A.M. + \left(\frac{\sum fx'}{N} \right) xi$$

$$= 48 + \left(-\frac{102}{100} \right) \times 5 \Rightarrow 47 + (-5.1) \Rightarrow 41.9$$

$$\sigma = i \sqrt{\frac{\sum fx'^2}{N} - \left(\frac{\sum fx'}{N} \right)^2}$$

$$= 5 \sqrt{\frac{408}{100} - \left(\frac{128}{100} \right)^2}$$

$$= 5 \sqrt{\frac{408}{100} - \left(\frac{16384}{10000} \right)}$$

$$= 5 \sqrt{4.08 - 1.64} = 5 \times 1.56 = 7.81$$

व्यवस्थित प्रदत्त से χ^2 की गणना

टेबुल - 2

वर्गान्तर (C.I.)	बारंबारता (f)	X (Mid point)	कल्पित विचलन x'	fx'	fx' ²	वास्तविक विचलन (X-M)	जेड प्राप्तांक Z score	Cumulative Proportion (P)	Cumulative frequency (P x N)	fe
60-64	2	62	3	6	18	20.1	2.57	.9949	99.49	2.17
55-59	5	57	2	10	20	15.1	1.93	.9732	97.32	7.17
50-54	10	52	1	10	10	10.1	1.29	.9015	90.15	15.93
45-49	25	47	0	0	0	5.1	.65	.7422	74.22	23.8
40-44	20	42	-1	-20	20	0.1	.013	.5040	50.40	23.97
35-39	18	37	-2	-36	72	-4.9	-.63	.2643	26.43	16.23
30-34	10	32	-3	-30	90	-9.9	-1.27	.1020	10.20	7.39
25-29	8	27	-4	-32	128	-14.9	-1.91	.0281	2.81	2.27
20-24	2	22	-5	-10	50	-19.9	-2.55	.0054	.54	.54

N=100

Mean=41.9

$\sigma = 7.81$

χ^2 की गणना

	उच्च	औसत	निम्न	
fo	17	45	38	100
fe	22.27	47.77	26.43	99.47
fo - fe	8.27	2.77	11.53	
(fo - fe) ²	68.39	7.67	133.86	

$\sum f(x') = +26$

= -128

-102

$\sum fx'^2 = 408$

$\sum fe = 99.47$

$$\frac{(fo - fe)^2}{fe} \quad .2.71 \quad .16 \quad 5.06$$

$$\therefore = 2.71 + .16 + 5.06 \Rightarrow 7.93$$

$$d.f. = (r-1)(c-1) = 0.05 \quad 5.99$$

$$= (2-1)(3-1) = 0.01 \quad 9.110$$

$$= 1 \times 2 = 2$$

शून्य परिकल्पना .05 सार्थकता स्तर पर अस्वीकृत ($P < .05$)

χ^2 गणना में निहित सोपान जब प्रदत्त वर्गान्तर तथा आवृत्ति के रूप में होते हैं। (Steps involved in calculation of χ^2 when data are in the form of class intervals and frequencies).

1. सर्वप्रथम, कॉलम 1 और 2 में वर्गान्तरों और आवृत्तियों को व्यवस्थित कर देते हैं।
2. कॉलम 3,4,5 तथा 6 का प्रयोग करके मध्यमान = 41.9 तथा प्रामाणिक विचलन = 7.81 की गणना कर लेते हैं।
3. कॉलम 7 में वास्तविक विचलन को प्रस्तुत किया गया है जिसके लिए मध्यबिन्दु (X) में से मध्यमान (M) को घटाया गया है।
4. कॉलम 8 में Z- प्राप्तांक को प्रस्तुत किया गया है जिसका सूत्र $\frac{X - M}{\sigma}$ है। इसे प्राप्त करने के लिए कॉलम 7 में प्रस्तुत मूल्यों को प्रामाणिक विचलन से भाग दिया गया है। प्राप्त भजनफल को कॉलम 8 में प्रदर्शित किया गया है।
5. कॉलम 9 में संचयी समानुपात ज्ञात करने के लिए Z प्राप्तांक पर आधारित प्रसामान्य वक्र के क्षेत्र (Areas of the Normal curve at different Z score) की तालिका N का उपयोग करते हैं जिसमें धनात्मक जेड प्राप्तांक (+2 score) के होने पर बड़े अंश (larger portion) तथा ऋणात्मक जेड प्राप्तांक (z score) के होने पर छोटे अंश (smaller portion) के क्षेत्र को देखकर संचयी अनुपात लिख दिया जाता है। प्राप्त क्षेत्र ही उसका संचयी अनुपात होता है। जैसे तालिका N में 2.57 के लिए बड़ा अंश = .9946 तथा -2.55 के लिए छोटा अंश + .0054 संचयी समानुपात होगा। सम्बन्धित तालिका N से इसी प्रकार समस्त z- प्राप्तांकों का संचयी समानुपात ज्ञात कर लिया जायेगा।
6. कॉलम 10 में संचयी आवृत्तियों की गणना की जायेगी। इसके लिए (PxN) ज्ञात करना होगा।
7. fe की गणना के लिए एक विशिष्ट प्रक्रिया अपनाई जाती है। कॉलम 10 में नीचे से पहली संचयी आवृत्ति .54 है। यही मूल्य fe के कॉलम वर्गान्तर 20-24 के fe के रूप में लिख दिया जायेगा। वर्गान्तर 25-29 का fe ज्ञात करने के लिए इसके संचयी आवृत्ति में से 20-24 वर्गान्तर के संचयी आवृत्ति को घटा दिया जायेगा। प्राप्त मूल्य $(2.81 - .54) = 2.27$, वर्गान्तर 25-29 के आगे fe के कॉलम में लिख दिया जायेगा। इसी प्रकार वर्गान्तर 30-34 का fe ज्ञात करने के लिए वर्गान्तर 30-34 के संचयी आवृत्ति = 10.20 में से वर्गान्तर 25-29 के संचयी आवृत्ति = 2.81 को घटा दिया जायेगा। प्राप्त मूल्य 7.39 होगा जो वर्गान्तर 30-34 का fe होगा। इसी प्रकार सभी वर्गान्तरों के लिए fe की गणना करती जायेगी।
8. प्राप्त fe का योग N के बराबर होना चाहिए। fe ज्ञात कर लेने के बाद fe को आवश्यकतानुसार 3, 4, 5 या वर्गों में बांट दिया जाता है लेकिन जब fe का गणना 5 से कम होता है तो अन्य वर्गान्तरों के fe के साथ उसे जोड़ दिया जाता है, ताकि fe का मूल्य 5 या इससे अधिक हो जाय। इसके बाद X^2 के सामान्य प्रक्रिया

के अनुसार X^2 की गणना कर ली जाती है। जैसा कि ऊपर उदाहरण में प्रस्तुत किया गया है।

5.4.3 — यादृच्छिक रूप से 100 विद्यार्थियों का चयन कर एक परीक्षण-व्यवहार किया गया। इसके प्राप्तांक के आधार पर आवृत्ति-वितरण की तालिका नीचे दी गई है। क्या यह आवृत्ति वितरण सामान्य रूप से वितरित समग्र से यादृच्छिक रूप से ली गई है?

CI	70-	65-	60-	55-	50-	45-	40-	35-	30-	25-	20-	Total
	74	69	64	59	54	49	44	39	34	29	24	f
f	2	4	8	12	14	20	13	13	9	3	2	100

परिकलन करने पर $M = 47$ तथा $\sigma = 11.09$ होता है।

इस प्रश्न को हल करने के लिए काई-वर्ग का परिकलन करना होता है तथा χ^2 के परिकलन के लिए अनुमानित आवृत्ति (fe) की संगणना करनी पड़ती है -

Table - 2

1	2	3	4	5	6	7	8
CI	f	Upper Limit	X-M	Z	Cumulative Proportion	Cumulative frequency	Expected Frequency
						CP X N	or fe
70 - 74	2	74.5	27.5	2.48	.9934	99.34	1.46
65 - 69	4	69.5	22.5	2.03	.9788	97.88	3.59
60 - 64	8	64.5	17.5	1.58	.9429	94.29	7.25
55 - 59	12	59.5	12.5	1.13	.8704	87.04	11.87
50 - 54	14	54.5	7.5	.68	.7517	75.17	16.46
45 - 49	20	49.5	2.5	.22	.5871	58.71	17.42
40 - 44	13	44.5	-2.5	-.22	.4129	41.29	16.46
35 - 39	13	39.5	-7.5	-.68	.2483	24.83	11.91
30 - 34	9	34.5	-12.5	-1.13	.1292	12.92	7.21
25 - 29	3	29.5	-17.5	-1.58	.0571	5.71	3.59
20 - 24	2	24.5	-22.5	-2.03	.0212	2.12	2.12

= 100

= 99.34

जब fo तथा fe का मान 5 से कम होता है तो इसे एक साथ मिला दिया जाता है। (नीचे की तालिका में देखें) यहाँ ऊपरी वर्गांतरों के fo के 2 और 4 को तथा fe के 1.46 एवं 3.59 को मिलाकर क्रमशः 6 तथा 5.05 कर दिया गया (इसे कॉलम 4 और 5 में लिखा गया है)। इसी प्रकार नीचे के दो वर्गांतरों के fo और fe भी किया गया है।

Table - 3

CI	f_o	f_e	f_o	f_e	$f_o - f_e$	$(f_o - f_e)^2$	$\frac{(f_o - f_e)}{f_e}$
70 - 74	2	1.46					
65 - 69	4	3.59	6	5.05	.95	.9025	.1787
60 - 64	8	7.21	8	7.21	.79	.6241	.0866
55 - 59	12	11.91	12	11.91	.09	.0081	.0007
50 - 54	14	16.46	14	16.46	-2.46	6.0516	.3676
45 - 49	20	17.42	20	17.42	2.58	6.6564	.3821
40 - 44	13	16.46	13	16.46	-3.46	11.9716	.7273
35 - 39	13	11.91	13	11.91	1.09	1.1881	.0998
30 - 34	9	7.21	9	7.21	1.79	3.2041	.4444
25 - 29	3	3.59	5	5.71	-.71	.5041	.0883
20 - 24	2	2.12					

N = 100

 $\chi^2 = 2.3755$

df के परिकलन का तरीका यहाँ थोड़ा भिन्न है। इनके निर्णयों की संख्या (number of categories) में 3 घटा दिया जाता है। वही df होता है। पहले श्रेणी की संख्या 11 थी जो 9 हो गई क्योंकि नीचे और ऊपर दो-दो श्रेणियों को मिलाकर एक-एक घटा लिया गया है।

f_e ज्ञात करने के चरण निम्नलिखित हैं -

1. प्राप्त आँकड़ों के आवृत्ति-वितरण की तालिका बना ली जाती है।
2. प्रत्येक वर्गांतर की उच्चतर सीमा (upper limit) ज्ञात की जाती है। 70-74 वर्गांतर में 74 की उच्चतर सीमा 74.5 तथा 65-69 वर्गांतर में 69 की उच्चतर सीमा 69.5 होगी। इस तरह से सभी वर्गांतरों की उच्चतर सीमा ज्ञात करके कॉलम 3 में लिखा गया है।
3. प्रत्येक उच्चतर सीमा में माध्य (47.00) को घटाकर कॉलम 4 में अंकित किया गया है।
4. कॉलम 5 में मानक प्राप्तांकों (Z-score) को अंकित किया गया है। $Z\text{-score} = (X-M)/\sigma$ होता है।
5. कॉलम 6 के परिकलन के लिए तालिका N को देखें। तालिका में मानक प्राप्तांक (z-score) के सामने में area in larger portion तथा area in smaller portion लिखा मिलेगा। मानक प्राप्तांक धनात्मक (+) तथा ऋणात्मक (-) दोनों में है। छात्रगण यहाँ ध्यान देंगे कि धनात्मक (+) मानक प्राप्तांक (z-score) के लिए area in larger portion के अंकित मान तथा ऋणात्मक (-) मानक प्राप्तांक के लिए area in smaller portion के अंकित मान कॉलम 6 में अंकित किया जाएगा। उदाहरणस्वरूप, वर्गांतर 70-74 के सामने (कॉलम 5) मानक प्राप्तांक 2.48 है। मानक प्राप्तांक 2.48 के सामने कॉलम 6 में तालिका के area in larger portion से .9934 मान अंकित किया गया है। इसी प्रकार 65-69 के सामने मानक प्राप्तांक 2.03 है और तालिका में 2.03 के सामने .9788 है। इसी मान को कॉलम 6 में लिखा गया। लेकिन, जो मानक प्राप्तांक ऋणात्मक (-) है उसके लिए area in smaller portion की ओर ध्यान देना होगा। जैसे-मानक प्राप्तांक -2.03 वर्गांतर 20-24 के सामने है। यहाँ तालिका N के अनुसार कॉलम 6 में .0212 है।

इस तरह सभी मानक प्राप्तांकों का संचयी समानुपात (cumulative proportion) ज्ञात करके कॉलम 6 में अंकित किया गया है।

6. कॉलम 7 में कॉलम 6 के प्रांकित मान को प्रतिदर्श की संख्या (N) से गुणा करके अंकित किया जाएगा। दूसरे शब्दों में संचयी समानुपात (cumulative proportion) को प्रतिदर्श की संख्या (100) से गुणा करके कॉलम 7 में अंकित किया जाएगा। $100 \times .9934 = 99.34$, $100 \times .9788 = 97.88$, $100 \times .0212 = 2.12$ को कॉलम 7 में अंकित किया गया है। इसे संचयी आवृत्ति (cumulative frequency) कहा जाएगा।
7. कॉलम 8 में अनुमानित आवृत्ति (fe) को लिखा गया है। संचयी आवृत्ति (cumulative frequency) से fe ज्ञात किया जाता है। संचयी आवृत्ति का परिकलन नीचे या ऊपर के वर्गांतर से किया जाता है। नीचे की संचयी आवृत्ति 2.12 है। यह मान fe होगा और यही मान कॉलम 8 में वर्गांतर 20-24 के सामने लिखा जाएगा। वर्गांतर 25-29 के सामने $5.71 - 2.12 = 3.59$ होगा, वर्गांतर 30-34 के सामने $12.92 - 5.71 = 7.21$ होगा तथा वर्गांतर 35-39 के सामने $24.83 - 12.92 = 11.91$ होगा। इसी प्रकार वर्गांतर 70-74 तक परिकलन किया जाएगा।

fe का परिकलन ऊपर के वर्गांतर 70-74 से भी हो सकता है। 70-74 के सामने संचयी आवृत्ति 99.34 है तथा उसके नीचे के वर्गांतर के सामने 97.88 है। वर्गांतर 70-74 के सामने fe का मान $99.34 - 97.88 = 1.46$ होगा तथा 65-69 के सामने fe का मान $97.88 - 94.29 = 3.59$ होगा। इस प्रकार fe का परिकलन किया जाता है।

fe का परिकलन करने के बाद एक प्रक्रिया और बाकी रह जाती है, वह यह कि 5 से जितनी आवृत्तियाँ कम हैं उन्हें एकसाथ मिला दिया जाता है। वर्गांतर 70-74 तथा 65-69 के सामने fo का मान क्रमशः 2 तथा 4 है। इसे एकसाथ मिलाकर 65-69 के सामने 6 लिखा जाएगा। उसी प्रकार से fe में भी $1.46 + 3.59 = 5.05$ अंकित किया जाएगा। दूसरी ओर, नीचे की आवृत्तियाँ भी 5 से कम हैं इसलिए वर्गांतर 25-29 के सामने fo का मान $3 + 2 = 5$ तथा fe का मान $3.59 + 2.12 = 5.71$ होगा। इस रूप में fo तथा fe को सजा लेने के बाद आसानी से पूर्ण की भाँति कोई-वर्ग का परिकलन कर लिया जाएगा।

व्याख्या - उपर्युक्त उदाहरण में $df = 6$ है। χ^2 तालिका M के अनुसार χ^2 के सार्थक होने के लिए .05 तथा .01 विश्वास-स्तर पर अपेक्षित मान क्रमशः 12.59 तथा 16.81 होना चाहिए। यहाँ प्राप्त कोई-वर्ग का मान 2.3755 है जो .05 विश्वास स्तर से काफी कम है। अतः शून्य-परिकल्पना को स्वीकृत करते हुए यह कहा जा सकता है कि यह आंकड़ा सामान्य रूप से वितरित है।

9.5 सारांश (Summing up)

इस पाठ में पाठक को कोई वर्ग परीक्षण के दो उपयोगों के बारे में विस्तार से जानकारी दी गई है। यहाँ कोई वर्ग परीक्षण का उपयोग (i) समान संभाव्यता वितरण परिकल्पना पर आधारित समस्याओं के आधार पर तथा (ii) सामान्य वितरण परिकल्पना पर आधारित समस्याओं के आधार पर, समझाया गया है। सामान्य वितरण पर आधारित दो प्रकार के उदाहरण को दर्शाया गया है जब उत्तरों की श्रेणी पाँच हो तथा जब उत्तरों की श्रेणी तीन हो। इस उपयोग से संबंधित पर्याप्त संख्या में ऐसे उदाहरण का परिकलन किया गया है जो पाठक को काफी सहायक सिद्ध होगा। इसी प्रकार अभ्यास के लिए भी पर्याप्त संख्या में प्रश्नों को शामिल किया है जिसके परिकलन से पाठकों को कोई वर्ग परीक्षण के परिकलन में किसी भी प्रकार के कठिनाई से बाहर करने में सक्षम होगा।

9.6 मॉडल प्रश्न (Model Questions)

1. निम्नलिखित प्रदत्तों से जनसंख्या में समान वितरण मानकर χ^2 की गणना कीजिये तथा इसकी सार्थकता का 0.05 स्तर पर परीक्षण कीजिये।

Calculate χ^2 from the following data by assuming equal distribution in the population and test its significance at 0.05 level:

I	II	III	IV	V	VI	Total
50	60	80	90	59	45	384

2. 60 प्रयोज्यों को एक मनोवृत्ति मापनी (Attitude scale) के दसवें एकांश (item no.10) के प्रति हाँ (yes), अनिश्चित (?) या नहीं (No) पर निशान लगाकर अपना विचार व्यक्त करने के लिए कहा गया। 30 प्रयोज्यों ने 'हाँ' 10 ने 'अनिश्चित' तथा 20 ने 'नहीं' पर निशान लगाया। प्रश्न है कि क्या प्रयोज्यों के उत्तरों के वितरण तथा प्रत्याशित उत्तरों (expected answers) के बीच कोई वास्तविक अन्तर है?

60 Respondents were administered an attitude scale and were asked to give their opinion to wards 10th item of the scale in ferous of 'yes', '?' and 'no'. Does any difference exist between the response of respondents and expected answers ?

3. येट्स संशोधन क्या है? निम्नलिखित प्रदत्तों से काई वर्ग की गणना कीजिये।

What is Yates' Correction? Calculated χ^2 from the following data :

A	B	C	D	E
3	10	8	17	2

4. एक कक्षा के 80 छात्रों को एक अभिवृत्ति मापनी (अनिवार्य सैन्य सेवा) के प्रति उनके विचार जानने के लिये दिया गया, जिसमें 30 इसके समर्थक, 40 विपरीत तथा 10 छात्र तटस्थ पाये गये। काई वर्ग के द्वारा समान सम्भाव्य परिकल्पना की पुष्टि कीजिये।

On 80 students of a class an attitude scale was administered to know their views about compulsory military education. 30 students found it useful, 40 did not like idea and 10 were neutral. Test the hypothesis of equal distribution by χ^2 test.

5. काई वर्ग χ^2 की उपयोगिता का व्याख्या कीजिये। निम्नलिखित सारणी से χ^2 ज्ञात कीजिये।

What are the use of Chi-Square (χ^2) ? Calculate from the table given below :

E	D	C	B	A	
मूल्यांकन श्रेणियाँ (Rating Categories)	बहुत बुरा (Very bad)	बुरा (bad)	उदासीन (Indifferent)	अच्छा (Good)	बहुत अच्छा (Very Good)
आवृत्तियाँ (Frequencies)	10	30	35	15	10

6. 50 विद्यार्थियों पर एक बुद्धि परीक्षण का उपयोग किया गया और प्राप्त आँकड़ों के आधार पर उन्हें निम्नलिखित तीन श्रेणियों में विभाजित किया गया -

An intelligence test was administered on 50 respondents and obtained data were distributed in to the following categories.

अच्छा (Good)	औसत (Average)	अपर्याप्त (Poor)
5	25	20

- (क) काई-वर्ग परीक्षण (χ^2) का उपयोग करके समान वितरण परिकल्पना (Equal Distribution Hypothesis) की जाँच करें।

- (ख) प्रसामान्य वितरण परिकल्पना (Normal Distribution Hypothesis) की जाँच करें।

7. 100 पुरुष और 100 महिला कॉलेज के विद्यार्थियों का 5 बिन्दु मापनी के एक एकांश पर अनुक्रियाओं की आवृत्तियाँ नीचे दी गई हैं। स्वतंत्रता के परीक्षण का उपयोग करें तथा निष्कर्ष का अर्थ समझाएँ।
The following are the frequency of responses of 100 male and 100 female college students towards an item 8 five point scale. Use independence hypothesis and interpret the result.

	पूर्ण सहमत SA	सहमत A	अनिश्चित U	असहमत B	पूर्ण असहमत SD
पुरुष (Male)		40	25	15	10
महिला (Female)		10	10	15	25

8. 81 व्यक्तियों को जनमत सर्वेक्षण (Public opinion survey) के आधार पर निम्नलिखित श्रेणियों (categories) में विभाजित किया गया - (81 persons were divided into the following three categories on the basis of public opinion survey.)

श्रेणियाँ (Grades)	1	2	3
व्यक्तियों की संख्या	5	25	20

- (क) उपर्युक्त विवरण की जाँच समान संभाव्यता परिकल्पना (equal hypothesis) के आलोक में करें। (Test of above description in the light of Equal Probability Hypothesis)
- (ख) उपर्युक्त विवरण की जाँच प्रसामान्य वितरण परिकल्पना (Normal Distribution hypothesis) के आलोक में करें। (Test of above description using normal distribution hypothesis.)
9. किसी मनोवृत्ति मापनी (Attitude Scale) के एक एकांश के प्रति 100 विद्यार्थियों को 5 विकल्पी उत्तरों अर्थात् पूर्ण सहमति (strongly agree), सहमति (agree), तटस्थ ((indifferent), असहमति (disagree) तथा पूर्ण असहमति (strongly disagree) में से चुनकर किसी एक उत्तर पर निशान लगाने के लिए कहा गया। उनके द्वारा दिए गए उत्तरों के वितरण को नीचे टेबुल में दिखलाया गया है।

The following are the responses of 100 respondents towards an item of an attitude scale in terms of SA, A, U, D and SD.

पूर्ण सहमति/सहमत (Strongly agree)	तटस्थ (Agree)	असहमति (In-different)	पूर्ण असहमति (Disagree)	पूर्ण असहमति (Strongly disagree)
22	18	26	18	16
				100

- (i) समान संभाव्यता परिकल्पना (Equal Probability Hypothesis) के आधार पर यह बतलाएँ कि क्या उपर्युक्त विवरण प्रत्याशित उत्तरों (expected answers) के वितरण से वस्तुतः भिन्न हैं? (Does expected answers differ from above distributions explain in the light of equal Probability hypothesis)
- (ii) प्रसामान्य वितरण परिकल्पना (normal distribution hypothesis) के आधार पर यह बतलाएँ कि उपर्युक्त वितरण तथा प्रत्याशित वितरण के बीच कोई वास्तविक अन्तर है? (Where obtained and expected distribution differ significantly answer in the light of normal distribution given below. Calculate χ^2 .)
10. एक मापनी को तीन तरह के आर्थिक स्तर के व्यक्तियों पर प्रयुक्त किया गया। परिणाम नीचे दिया गया है। इसके आधार पर काई-वर्ग का परिकलन करें। (A Scale was employed on three Categories of Persons with different SES. The scores are)
- (a) समान संभावना के आधार पर (Using Equal Probability Hypothesis)
- (b) सामान्य संभावना के आधार पर (Using Normal Probability Hypothesis)

उच्च High मध्य Middle निचा Low
15 40 25

11. एक अभिवृत्ति परीक्षण के एक पद पर बालकों एवं बालिकाओं की प्रतिक्रिया की संख्या निम्न प्रकार की है। परीक्षा कीजिए कि क्या उस पद पर दोनों समूह सार्थक रूप से भिन्न हैं -
(The following are the boys and girls on an item & an aptitude test. Do they differ the following significantly ?)

	Strongly agree	Agree	Undecided	Disagree	Strongly disagree
Boys	20	10	5	15	5
Girls	10	15	20	10	10

12. In mathematical ability, 100 students were divided into three categories — above average, average and below average — by the teachers.

गणितीय योग्यता ये शिक्षकों ने 100 विद्यार्थियों को तीन श्रेणियों में बांट दिया - औसत से ऊपर, औसत तथा औसत से नीचे।

आँकड़े नीचे दिए गए हैं :

The data are given below :

औसत से ऊपर (Above average)	(औसत) (Average)	(औसत से नीचे) (Below average)	
23	40	37	100

Will this distribution differ significantly from that to be expected if mathematical ability is normally distributed in the students?

क्या यह वितरण सार्थक रूप से प्रत्याशित वितरण से भिन्न होगा यदि गणितीय योग्यता का विद्यार्थियों में प्रसामान्य वितरण हो?

13. समानुकता से आप क्या समझते हैं? निम्न वितरण की सामान्यता की जाँच χ^2 द्वारा करें -

What do you mean by goodness of fit? To test the normality of distribution, calculate χ^2 of the following data —

Strongly agree	Agree	Undecided	Disagree	Strongly disagree
23	19	14	16	18

14. नीचे 108 विद्यार्थियों के उत्तर की आवृत्तियाँ पाँच-बिन्दु-मापनी पर दी गई हैं। सामान्य वितरण परिकल्पना के आधार पर χ^2 का परिकलन करें।

पूर्ण सहमत	सहमत	अनिश्चित	असहमत	पूर्ण असहमत
10	20	40	20	10

15. निम्नलिखित प्रदत्तों से जनसंख्या में सामान्य वितरण मानकर χ^2 की गणना कीजिये।

Calculate χ^2 from the following data by assuming equal Normal Distribution in the population.

a.	A	B	C	D	E
	35	30	52	40	23
b.	A	B	C	D	
	18	22	24	16	
c.	A	B	C		
	12	20	10		

16. काई वर्ग की गणना कीजिये (Calculate the χ^2).

क्रिकेट मैच पसन्द आवृत्तियाँ (Preferred to Cricket Match Frequencies)

खेल के मैदान पर (On play ground)	ट्रांजिस्टर पर (On Transistor)	टेलीविजन पर (On the Television)	योग Total
156	44	130	330

17. सामान्य वितरण परिकल्पना के आधार पर निम्नलिखित प्राप्तांकों द्वारा काई वर्ग की गणना करते हुए सार्थक स्तर ज्ञात कीजिये -

Calculate χ^2 and its significance level on the basis of Normal Distribution hypothesis:

श्रेणी (Division)	प्रेषित आवृत्ति (fe)
I	10
II	14
III	16
Total	40

18. नीचे टेबुल में दिए गए बारंबारता वितरण (frequency distribution) से χ^2 ज्ञात करें -
(Calculate χ^2 from the frequency distribution given below :)

प्राप्तांक (Scores)	बारंबारता (frequency)
80 - 89	1
70 - 79	2
60 - 69	3
50 - 59	4
40 - 49	10
30 - 39	4
20 - 29	3
10 - 19	2
0 - 9	1

N = 30

19. गणित की समस्या के समाधान में उत्तीर्ण तथा अनुत्तीर्ण होने वाले 5 विद्यालयों के पाँचवें वर्ग के छात्रों की संख्या निम्नलिखित हैं - (The followings are the no. of students parried are failed of class vth of five schools in solutio & a Mathematical Problems.)

विद्यालय (School)	उत्तीर्ण (Pass)	अनुत्तीर्ण (Fail)
1	30	20
2	25	25
3	40	15
4	35	20
5	45	15

क्या गणित की यह समस्या 5 विद्यालयों के पाँचवें वर्ग के छात्रों के गणित से सम्बन्धित निष्पादनों (performances) के बीच अन्तर बताने में सक्षम है?

20. निम्नलिखित श्रेणियों में 215 व्यक्तियों को बांटा गया। ये सभी श्रेणी किसी जनमत के माप के विभिन्न श्रेणी हैं -

श्रेणी (Categories)

I	II	III	IV	V	Total
10	50	80	25	50	215

- (a) उपर्युक्त वितरण को समान प्रायिकता प्राक्कल्पन (Equal Probability Hypothesis) के आधार पर जाँच करें।
- (b) उपर्युक्त वितरण को प्रसामान्य वितरण प्राक्कल्पना (Normal Distribution Hypothesis) के आधार पर जाँच करें।

21. निम्नलिखित आवृत्ति वितरण को प्रसामान्य वितरण प्राक्कल्पना (Normal Distribution hypothesis) के आधार पर χ^2 द्वारा जाँच करें -

प्राप्तांक (Scores)	आवृत्ति (frequency)
190 - 199	1
180 - 189	4
170 - 179	6
160 - 169	8
150 - 159	10
140 - 149	11
130 - 139	8
120 - 129	6
110 - 119	3
100 - 109	3

N = 60

22. 600 छात्रों पर एक मनोवृत्ति मापनी के एकांश संख्या 10 पर आँकड़े निम्नांकित हैं -
(The followings are the scores of 600 students on item 10 of an attitude scale.)

श्रेणी (Categories)

I	II	III	IV	V	VI
150	145	80	75	100	600

- (a) उपर्युक्त आँकड़ों के आधार पर प्रसामान्य वितरण प्राक्कल्पना (Normal Distribution Hypothesis) के आधार पर जाँच करें।
- (b) उपर्युक्त आँकड़ों के आधार पर समान वितरण प्राक्कल्पना (Equal Probability hypothesis) के आधार पर जाँच करें।

23. निम्नलिखित प्रदत्तों के लिए सामान्य वितरण परिकल्पना का उपयोग करते हुए कोई वर्ग ज्ञात कीजिए -
- | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|
| 20 | 30 | 10 | 18 | 15 | 22 |
|----|----|----|----|----|----|

24. आँकड़े नीचे दिए गए हैं :

The data are given below :

औसत से ऊपर (Above average)	(औसत) (Average)	(औसत से नीचे) (Below average)
23	40	37
		100

Will this distribution differ significantly from that to be expected if mathematical ability is normally distributed in the students?

क्या यह वितरण सार्थक रूप से प्रत्याशित वितरण से भिन्न होगा यदि गणितीय योग्यता का विद्यार्थियों में प्रसामान्य वितरण हो?

25. क्या निम्नांकित आवृत्ति वितरण प्रसामान्य रूप से वितरित (normally distributed) है? उपर्युक्त सांख्यिकी के आधार पर जवाब दें :

(Does the following distribution distributed normally ? Answer using appropriate statistics.)

प्राप्तांक (Scores)	आवृत्ति (frequency)
60 - 64	3
55 - 59	5
50 - 54	6
45 - 49	8
40 - 44	112
35 - 39	23
30 - 34	6
25 - 29	2
20 - 24	3
15 - 19	1
10 - 14	1

N = 70

26. एक मनोवृत्ति परीक्षण (attitude test) के एक एक एकांश (item) बालकों एवं बालिकाओं की प्रतिक्रियाओं की प्रतिक्रिया की संख्या निम्न प्रकार की है। मूल्यांकन कीजिए कि क्या उस पद पर दोनों समूह सार्थक रूप से भिन्न हैं ?

(The following are the responses of boys and girls on an item of an attitude scale. Do the groups differ significantly ?)

	पूर्ण सहमत Strongly agree	सहमत Agree	अनिश्चित Undecided	असहमत Disagree	पूर्ण असहमत Strongly disagree
लड़के (Boys)	20	10	5	15	5
लड़कियाँ (Girls)	10	15	20	10	10