NALANDA OPEN UNIVERSITY

Course : M.A Psychology, Part-I

Paper : Paper-VI

Prepared by : Dr. (Prof.) Prabha Shukla
Retd. Professor of Psychology, Patna University and
Chief Co-ordinator, School of Social Sciences,
Nalanda Open University

Topic : वैषम्य या विषमता तथा ककुदता
(Skewness and Kurtosis)

वैषम्य या विषमता तथा ककुदता
(Skewness and Kurtosis)

6.1 परिचय (Introduction)

वैषम्य या विषमता तथा ककुदता प्रसामान्य संभाव्यता वितरण के विलचन की माप है। इसके पहले कि अध्याय में शामिल संप्रत्यय को समझा जाय यह आवश्यक है कि प्रसामान्य संभाव्यता वक्र के अर्थ एवं विशेषता को समझा जाय । प्रसामान्य संभाव्यता वक्र की परिभाषा मनोवैज्ञानिकों ने अपने अपने तरीके से दी है—

गैरेट (Garrett, 1981) ने कहा है कि घंटी के आकार का जो वितरण वक्र (distribution curve) होता है, उसे ही प्रसामान्य वक्र (normal curve) कहते हैं । उनके अपने शब्दों में "घंटाकर चित्र को प्रसामान्य संभाव्यता वक्र या केवल प्रसामान्य वक्र कहते हैं ।"

चैपलिन (Chaplin, 1975) के अनुसार, "पूर्ण प्रसामान्य वितरण (perfect normal distribution) पर आधारित वक्र को प्रसामान्य वक्र कहते हैं । पूर्ण प्रसामान्य वितरण (perfect normal distribution) का अर्थ वह वितरण है, जो संभाव्यता-सिद्धांत (probability theory) पर आधारित होता है ।" इस सिद्धान्त के अनुसार कोई चर (variable) संयोग के नियमों के अनुकूल घटित होता है । इस सिद्धांत के अनुसार कोई चर (variable) संयोग के नियमों के अनुकूल घटित होता है । **चैपलिन** (Chaplin, 1975) के शब्दों में "प्रसामान्य संभाव्यता वक्र वह वक्र है, जो बारंबारता को इस प्रकार चित्रित करता है कि उसके साथ घटित होने वाला चर संयोग के नियमों द्वारा संचालित होता है ।"

पिटर स्ट्रेटोन एवं **निक्की हेस** (Peter Stratton and Nicky Hayes, 1991) के अनुसार "प्रसामान्य वक्र वह वक्र है, जिसका निर्माण तब होता है जब प्रसामान्य रूप से वितरित जनसंख्या से प्राप्त आँकड़े बारंबारता तालिका के रूप में आलेखित होते हैं ।"

प्रसामान्य वक्र को गौसियन वक्र (Gaussian curve) भी कहते हैं । कारण, **कार्ल फ्रेडरिक गौस (Karl Friedrich Gauss)** ने इस वक्र का उपयोग नक्षत्रशास्त्र की समस्याओं के समाधान में सफलतापूर्वक किया ।

6.2 प्रसामान्य सम्भाव्यता वक्र की विशेषताएँ
(Characteristics of Normal Probability Curve)

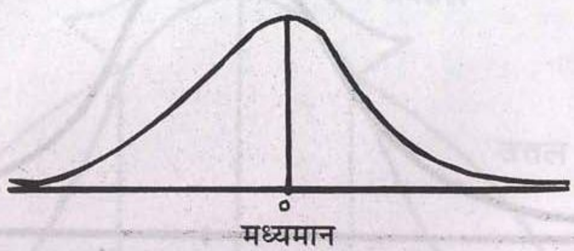
6.2 प्रसामान्य सम्भाव्यता वक्र की विशेषताएँ (Characteristics of Normal Probability Curve)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र की निम्नलिखित महत्वपूर्ण विशेषताएँ होती हैं—

6.2.1 वक्र की आकृति (Shape of Curve)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) की आकृति घंटाकर (Bell shaped) होती है । प्राप्तांकों का वितरण सममित (Symmetrical) होता है । मध्य में प्राप्तांक सर्वाधिक होते हैं तथा सममित रूप से दोनों और फैलते चलते हैं । इसी कारण से वक्र को सामान्य वितरण वक्र (Normal Distribution Curve) कहा

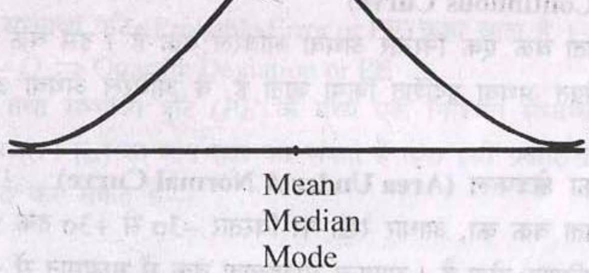
जाता है । यदि मध्यमान से लम्बवत् रेखा खीची जाये तो वह वक्र को दो समान भागों में विभाजित करती है ।



6.2.2 मध्यमान, मध्यांक तथा बहुलांक की समानता (Equality of Mean, Median and Mode)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र की दूसरी महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि इसमें केन्द्रीय प्रवृत्ति (Central tendency) के तीनों माप—मध्यमान, मध्यांक तथा बहुलांक का मान समान होता है ।

Mean = Median = Mode



6.2.3 वक्र का गणितीय समीकरण (Mathematical Equation of Curve)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र की आधार रेखा (X-अक्ष) का विस्तार तथा Y अक्ष की ऊँचाई का निर्धारण निम्नलिखित गणितीय सूत्र द्वारा निर्धारित होता है, जिसे सामान्य सम्भाव्यता वक्र का समीकरण भी कहा जाता है—

$$y = \frac{N}{\sigma\sqrt{2\pi}} e \frac{x^2}{2\sigma^2}$$

जहाँ $y = x$ अक्ष के ऊपर वक्र की ऊँचाई

$n =$ आवृत्तियों का योग

$\sigma =$ वितरण का प्रामाणिक विचलन ($S.D.$)

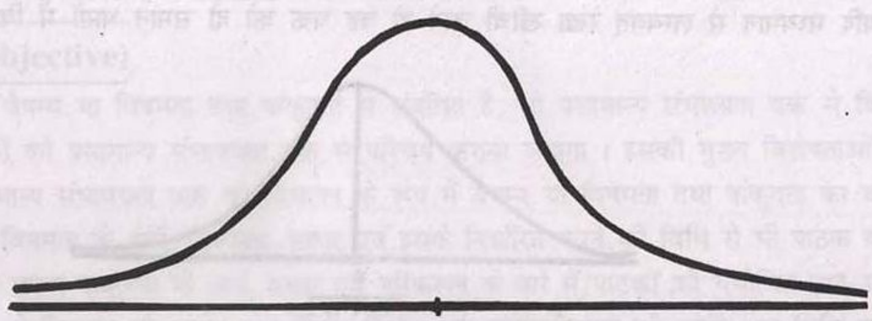
$\pi =$ परिधि तथा व्यास का अनुपात ($22/7 = 3.14$)

$e =$ नेपिरियन (Napierian) लॉगर्थिम का अनुपात (2.718)

$x =$ मध्यमान से प्राप्तांक का विचलन

6.2.4 अनन्त स्पर्शीय वक्र (Asymptotic Curve)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र के दोनों छोर (ends) आधार रेखा (अक्ष-भुजा) को स्पर्श नहीं करते हैं ।



6.2.5 विषमता गुणांक (Coefficient of Skewness)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र का वितरण सामान्य होता है, जिसके कारण वक्र का विषमता गुणांक शून्य होता है । वक्र पूर्णतः सन्तुलित होता है, उसमें किसी प्रकार की विषमता नहीं पाई जाती है ।

6.2.6 ककुदता गुणांक (Coefficient of Kurtosis)

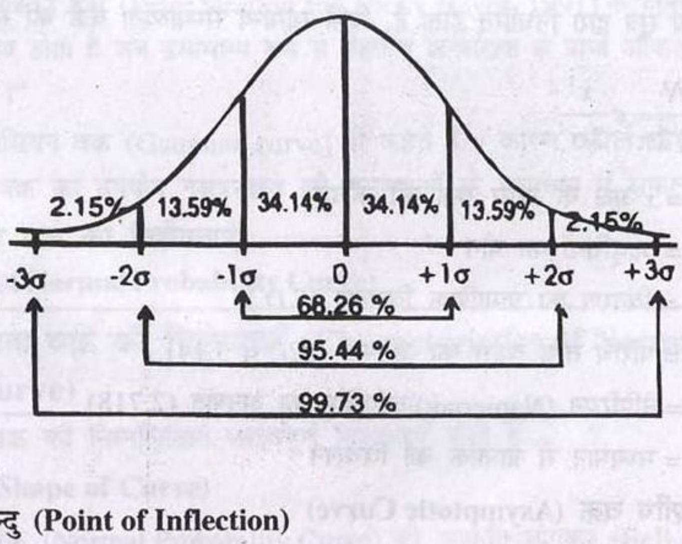
ककुदता गुणांक वक्र के मध्य की ऊँचाई को स्पष्ट करता है । सामान्य सम्भाव्यता वक्र मध्य में बहुत नुकीला (Lepto Kurtic) नहीं होता है और न ही अधिक चपटा (Play Kurtic) होता है । वक्र की ऊँचाई औसत होती है । इसका ककुदता गुणांक (Coefficient of Kurtosis) का मान 0.263 (Ku = 0.263) होता है ।

6.2.7 निरन्तर वक्र (Continuous Curve)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र एक निरन्तर अथवा अविरल वक्र है । इस वक्र की आधार रेखा (अक्ष भुजा) पर जिन प्राप्तांकों को आलेखित अथवा प्रदर्शित किया जाता है, वे अविरल अथवा अविछिन्न (Continuous) होते हैं ।

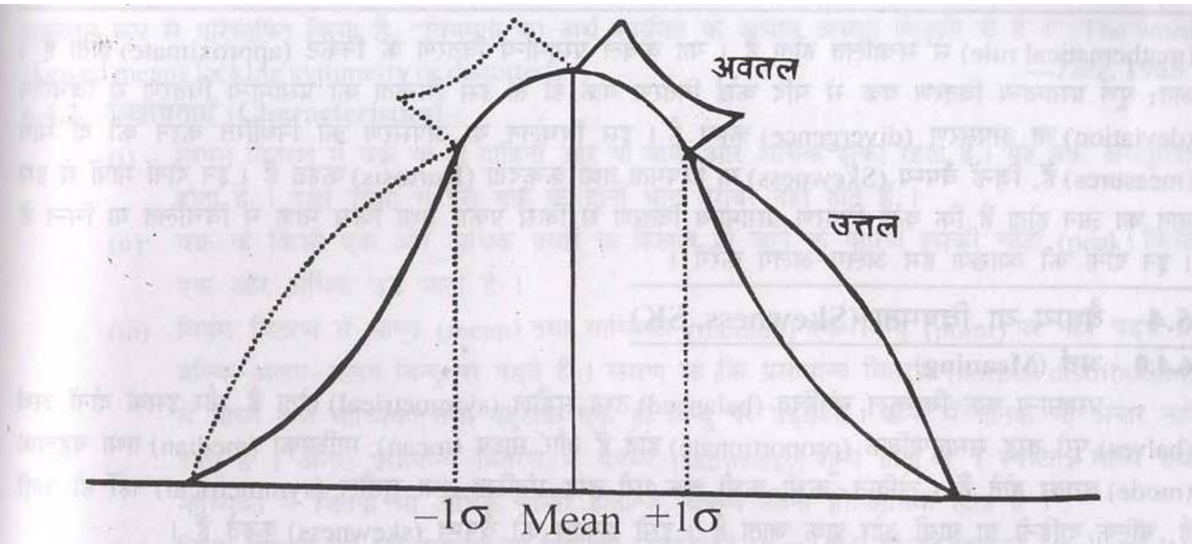
6.2.8 सामान्य वक्र का क्षेत्रफल (Area Under A Normal Curve)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र का, आधार रेखा पर विस्तार -3σ से $+3\sigma$ तक 99.73 प्रतिशत (शेष .027 नगण्य प्रतिशत के कारण 100 प्रतिशत) होता है । सामान्य सम्भाव्यता वक्र में मध्यमान से $\pm1\sigma$ का क्षेत्रफल 34.13 प्रतिशत, $\pm2\sigma$ का क्षेत्रफल 68.26 प्रतिशत तथा $\pm3.00\sigma$ का क्षेत्रफल 99.73 प्रतिशत होता है । इसे निम्नलिखित चित्र द्वारा स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है—



6.2.9 दिशा परिवर्तन बिन्दु (Point of Inflection)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र के मध्यमान से 1σ ऊपर तथा 1σ नीचे (+1 से -1σ तक) वक्र की आकृति अवतल (Concave) होती है तथा इसके पश्चात् उत्तल (convex) में परिवर्तित होती है ।



6.2.10 निश्चित सम्बन्ध (Definite Relationship)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र के अन्तर्गत विचलनों के विभिन्न मापाकों के मध्य एक निश्चित सम्बन्ध होता है । चतुर्थांक एक (Q_1) तथा चतुर्थांक तीन (Q_3) का मध्यमान से अन्तर समान होता है, जिसे चतुर्थांक विचलन (Quartile Deviation) अथवा सम्भाव्य त्रुटि (Probable Error or PE) कहा जाता है । अत: कहा जा सकता है—

$Q_3 - \text{Mean} = \text{Mean} - Q_1 \Rightarrow$ Quartile Deviation or PE

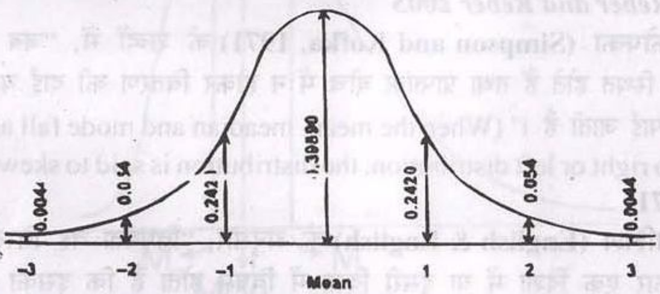
प्रामणिक विचलन (σ) तथा सम्भाव्य त्रुटि (*PE*) के मध्य एक निश्चित सम्बन्ध होती है । सम्भाव्य त्रुटि (*PE*) ज्ञात होने पर प्रामाणिक विचलन (σ) का मान ज्ञात कर सकते हैं तथा इसी प्रकार प्रामाणिक विचलन (σ) ज्ञात होने पर सम्भाव्य त्रुटि (PE) ज्ञात कर सकते हैं—

$PE = 0.6756\sigma$

$\sigma \ = 1.4826\ PE$

6.2.11 वक्र का कोटिमान (Ordinate Value of Curve)

सामान्य सम्भाव्यता वक्र में विभिन्न जेड मानों (Z–Values) पर कोटि (Ordinate) की ऊँचाई भिन्न-भिन्न होती है । मध्यमान बिन्दुं पर कोटि का ऊँचाई सर्वाधिक 0.3989 होती है ।



इस प्रकार स्पष्ट है कि सामान्य सम्भाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) में विभिन्न महत्वपूर्ण विशेषताएँ निहित हैं । यहाँ यह भी स्पष्ट करना आवश्यक है कि सामान्य सम्भाव्यता वक्र एक सैद्धान्तिक कल्पना है, अत: आवश्यक नहीं है कि यह सामान्य जनसंख्या आदि का प्रतिनिधित्व ही करे ।

6.3 प्रसामान्य संभाव्यता वक्र का विचलन (Deviations of Normal Probability Curve)

प्रसामान्य वक्र (Normal Curve) अथवा प्रसामान्य सम्भाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) की कई विशेषताओं की व्याख्या ऊपर की गयी है । लेकिन, प्रसामान्य वितरण शुद्ध रूप में केवल गणितीय नियम

(mathematical rule) से संचालित होता है । यह केवल प्रसामान्य वितरण के निकट (approximate) होता है । अत: पूर्ण प्रसामान्य वितरण वक्र से यदि कोई वितरण वक्र हो तो इस भिन्नता को प्रसामान्य वितरण से विचलन (deviation) या अपसरण (divergence) कहते हैं। इस विचलन या अपसरण को निर्धारित करने की दो माप (measures) हैं, जिन्हें वैषम्य (Skewness) या विषमता तथा ककुदता (Kurtosis) कहते हैं । इन दोनों मापों से इस बात का ज्ञान होता है कि कोई वितरण प्रसामान्य वितरण से किस प्रकार तथा किस मात्रा में विचलित या भिन्न है । इन दोनों की व्याख्या हम अलग-अलग करेंगे ।

6.4 वैषम्य या विषमता (Skewness, SK)

6.4.0 अर्थ (Meaning)

प्रसामान्य वक्र बिल्कुल संतुलित (balanced) तथा सुडौल (symmetrical) होता है और इसके दोनों अर्थ (halves) पूरी तरह समानुपातिक (proportionate) होते हैं और माध्य (mean), माध्यिका (median) तथा बहुलक (mode) बराबर होते हैं । लेकिन, कभी-कभी वक्र पूरी तरह संतुलित तथा सुडौल (symmetrical) नहीं हो पाती है, बल्कि दाहिनी या बायीं ओर झुक जाता है । इसी झुकाव को वैषम्य (skewness) कहते हैं ।

किसी वक्र में सममितता (Symmetry) के अभाव को विषमता कहा जाता है, ऐसी अवस्था में प्रसामान्य वितरण का आकार घंटाकर (Bell shaped) नहीं होता है । यह वितरण तभी पाया जाता है जब मध्यमान, मध्यांक तथा बहुलांक भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर स्थित होते हैं, जबकि प्रसामान्य वितरण में मध्यमान, बहुलांक तथा मध्यांक एक ही जगह होती हैं । इसलिये विषमता शून्य होती है । विषमता में प्राप्तांक केन्द्र में न होकर किसी एक ओर अधिक होते हैं इसमें वक्र में नियमितता का ह्रास होता है ।

6.4.1 परिभाषाएँ (Definitions)

चैपलिन (Chaplin, 1975) के अनुसार, "किसी आवृत्ति-वक्र के एक ओर से दूसरी ओर अधिक फैलाव को विषमता कहते हैं जिसके फलस्वरूप वक्र का एक छोर दूसरे छोर की अपेक्षा एक ओर अधिक उठ जाता है ।" (Skewness is the extension of a frequency curve furhter to one side than to another, with a consequent tendency to peak more on one side than on another.) —***Chaplin*, 1975**

रेबर एवं रेबर (Raber and Reber 2003) के अनुसार, "पूर्ण सुडौलपन से किसी आवृत्ति वितरण के वक्र के विचलन की मात्रा को विषमता कहते हैं ।" (Skewness is the degree to which the curve of a frequency distribution departs from perfect symmetry.)

—***Reber and Reber* 2003**

सिम्पसन तथा **कोफ्का (Simpson and Kofka, 1971)** के शब्दों में, "जब मध्यमान, मध्यांक तथा बहुलक भिन्न बिन्दुओं पर स्थित होते हैं तथा प्राप्तांक बीच में न होकर वितरण की दाईं या बायीं ओर अधिक हाते हैं, तो वितरण में विषमता पाई जाती है ।" (When the mean, meadian and mode fall at different points and the balance is shifted to right or left distribution, the distribution is said to skewed.) —***Simpson & Kofka*, 1971**

इंगलिश तथा **इंगलिश (English & English)** के अनुसार, "विषमता वह विस्तार है जिस विस्तार तक कोई आवृत्ति वक्र इस प्रकार एक दिशा में या दूसरी दिशा में विषम होता है कि इसका एक छोर दूसरे छोर की अपेक्षा बहुलांक स अधिक दूर होता है । विषमता उसी ओर होती है जिस ओर वक्र का छोर अधिक लम्बा होता है । विषमता उस समय धनात्मक होती है जब वक्र का लम्बा छोर बहुलांक से ऊपर वाले प्राप्तांक की ओर होता है । ऋणात्मक विषमता उस समय होती है जब वक्र का लम्बा छोर बहुलांक से कम प्राप्तांक की ओर होता है ।" (Skewness is the extent to which a frequency curve is twisted to one side or another, so that it extends further to one side of the mode than the other. Skewness is positive when the longer tail of the curve is few cases greater than the mode, negative when the longer tail is less than the mode.)

—***English & English***

टेट (Tate, 1965) ने अपनी पुस्तक Statistics in Education and Psychology में विषमता को अत्यन्त

सरलतम रूप से परिभाषित किया है, "विषमता का अर्थ सममित के अभाव अथवा विकृति से है।" (The word skewed means lacking symmetry or distorted) —*Tate*, **1965**

6.4.2 विशेषताएँ (Characteristics)

(i) विषम वितरण में वक्र या तो दाहिनी ओर या बायीं ओर अधिक झुका रहता है। यह वक्र असंतुलित होता है। दूसरे शब्दों में इस वक्र के दोनों भाग बराबर नहीं होते हैं।

(ii) वक्र के किसी एक ओर अधिक प्रसार या फैलाव हो जाने के कारण इसकी चोटी (peak) किसी एक ओर अधिक उठ जाती है।

(iii) विषम वितरण में माध्य (mean) तथा माध्यिका (median) एक बिन्दु (point) पर नहीं पड़ते हैं, बल्कि अलग-अलग बिन्दु पर पड़ते हैं। स्मरण रहे कि प्रसामान्य वितरण (normal distribution) में माध्य तथा माध्यिका तथा बहुलक एक ही बिन्दु पर पड़ते हैं। तीनों में तनिक भी अन्तर नहीं होता है। अन्त: प्रसामान्य वितरण में वैषम्य (skewness) शून्य होता है। स्पष्टत: माध्य तथा माध्यिका में जितना भी अधिक अन्तर होता है, वैषम्य उतना ही अधिक होता है।

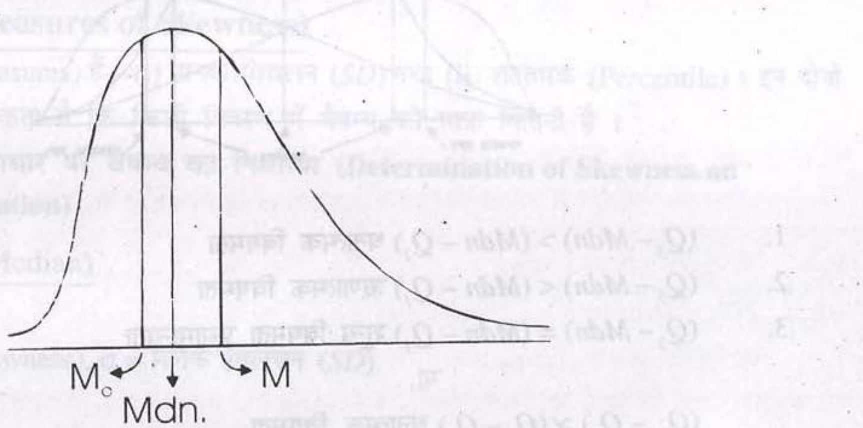
(iv) विषम वितरण की एक पहचान या विशेषता द्विबहुलकी (bimodal) या बहुबहुलकी (multimodal) है। स्मरण रहे कि प्रसामान्य वितरण एक बहुलकी (unimodal) होता है।

6.4.3 वैषम्य के प्रकार (Types of Skewness)

6.4.3.1 धनात्मक विषमता (Positive Skewness)

जब मध्यांक और मध्यमान के मूल्य भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर पड़ते हैं और वक्र दाहिनी ओर अधिक झुक जाता है तो विषमता धनात्मक होती है। इसमें मध्यमान का मूल्य मध्यांक के मूल्य से अधिक होती है। इसमें अधिकतर प्राप्तांक बायीं दिशा की ओर होते हैं तथा मध्यमान मध्यांक के दाहिनी ओर होता है। (Distriaution are side to be skewed positively, or to the right, when the scores are massed at the low (the left) end of the scale, and spread out gradually toward the high or right end.)

—*Garrett*, **1966**



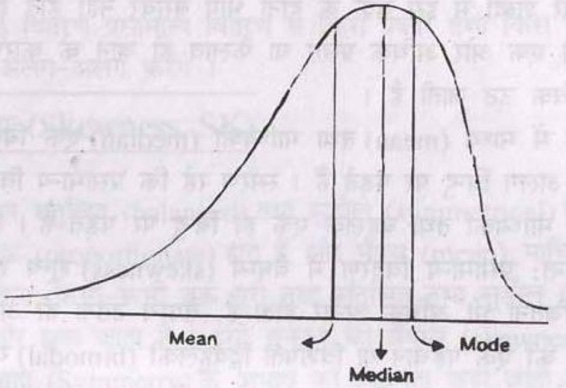
Positics Skewness

6.4.3.2 ऋणात्मक विषमता (Negative Skewness)

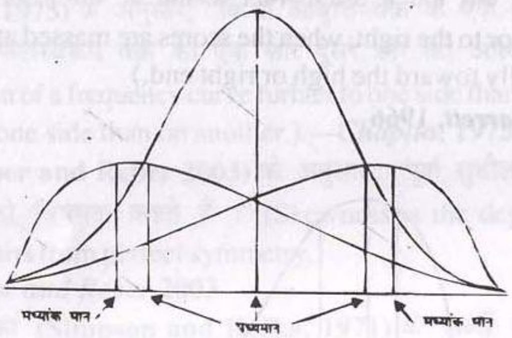
इसमें मध्यमान का मूल्य बहुलांक या मध्यांक मूल्य से कम होता है। इसमें वक्र ऋणात्मक दिशा (बायीं ओर) में अधिक लम्बा होता है। ऋणात्मक विषमता में प्रदत्त के अधिकांश प्राप्तांक दाहिनी ओर होते हैं। इसमें मध्यमान मध्यांक के बायीं ओर होती है। इसमें पहले मध्यमान, फिर मध्यांक और फिर बहुलक होता है।

(Distributions are said to be skewed negatively, or to the left, when scores are massed at the h of the scale (the right end), and spread out gradually at the low or left end)

—*Garrett*, 19



6.4.4 वैषम्य के दिशा की शर्तें (Conditions for the Direction of Skewness)



1. $(Q_3 - Mdn) > (Mdn - Q_1)$ धनात्मक विषमता
2. $(Q_3 - Mdn) < (Mdn - Q_1)$ ऋणात्मक विषमता
3. $(Q_3 - Mdn) = (Mdn - Q_1)$ शून्य विषमता प्रसामान्यता

या,

$(Q_3 - Q_2) > (Q_2 - Q_1)$ धनात्मक विषमता

4. $(Q_3 - Q_2) < (Q_2 - Q_1)$ ऋणात्मक विषमता
5. $(Q_3 - Q_2) = (Q_2 - Q_1)$ शून्य विषमता प्रसामान्यता
6. $(P_{90} - P_{50}) = (P_{50} - P_{10})$ शून्य विषमता, प्रसामान्यता
7. $(P_{90} - P_{50}) > (P_{50} - P_{10})$ धनात्मक विषमता
8. $(P_{90} - P_{50}) < (P_{50} - P_{10})$ ऋणात्मक विषमता

6.4.5 वैषम्य मालूम करने के सूत्र

(Formulae Determining Skewness)

1. $$SK = \frac{3(\text{Mean} - \text{Median})}{\sigma}$$

2. $$SK = \frac{(P_{90} + P_{10}) - P_{50}}{2}$$

3. $$SK = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Md}{Q_3 - Q_1}$$

4. $$SK = \frac{M - M_o}{\sigma}$$

5. $$SK = \frac{(Q_3 - Mdn) - (Mdn - Q_1)}{(Q_3 - Mdn) + (Mdn - Q_1)}$$

6. $$SK = \frac{D_9 - D_1}{2} - D_5$$

7. $$SK = \frac{D_9 + D_1}{2} - Mdn$$

8. $$\text{Relative } SK = \frac{M - \text{Mode}}{\sigma}$$

6.5 वैषम्य की मापें (Measures of Skewness)

वैषम्य की दो मापें (measures) हैं—(i) मानक विचलन (*SD*) तथा (ii) शततमक (Percentile) । इन दोनों मापों के आधार पर देखा जा सकता है कि किसी वितरण में वैषम्य की मात्रा कितनी है ।

6.5.1 मानक विचलन के आधार पर वैषम्य का निर्धारण (Determination of Skewness on the basis of Standard Deviation)

$$SK = \frac{3(\text{Mean} - \text{Median})}{\sigma}$$

यहाँ SK = वैषम्य (Skewness), σ = मानक विलचन (*SD*)

उदाहरण–1

माध्य (Mean), माध्यिका (Median) तथा मानक विचलन (*SD*) क्रमश: 42.91, 43.5 तथा 7.21 है । इस वितरण का वैषम्य इस प्रकार निकाला जाएगा—

$$\text{वैषम्य} = \frac{3(42.91 - 43.5)}{7.21} \Rightarrow \frac{3 \times (-.59)}{7.21} \Rightarrow \frac{-1.77}{7.21} \Rightarrow -0.24$$

अत: इस वितरण में अध्यात्मक वैषम्य (negative skewness) है जिसकी मात्रा बहुत कम (–.24) है । यह वितरण वास्तव में सामान्य वितरण के बहुत निकट है ।

उदाहरण–2

माध्य (Mean), माध्यिका (Median) तथा मानक विचलन (SD) क्रमश: 71.40, 71.17 तथा 10.8 हैं । इस वितरण का वैषम्य इस प्रकार निकाला जाएगा—

$$\text{वैषम्य} = \frac{3(71.4-71.17)}{10.8} \Rightarrow \frac{3\times.23}{10.8} \Rightarrow \frac{.69}{10.8} \Rightarrow .064$$

अत: इस वितरण में धनात्मक वैषम्य (positive skewness) है जो वास्तव में नाममात्र (.064) है । इसका अर्थ यह हुआ कि पहला वितरण की अपेक्षा दूसरा वितरण प्रसामान्य वितरण के अधिक निकट है ।

6.5.2 शततमक के आधार वैषम्य या निर्धारण (Determination of Skewness on the basis of Percentile)

$$SK = \frac{P_{90}+P_{10}}{2} - P_{50} \qquad \ldots\text{(ii)}$$

यहाँ, SK = वैषम्य (Skewness), P = शततमक (Percentile)

उदाहरण–1

P_{10}, P_{50} तथा P_{90} क्रमश: 32, 43.5 तथा 51.5 हैं । इस वितरण की वैषम्य निम्नलिखित होगा—

$$\text{वैषम्य} = \frac{51.5+32}{2} - 43.5$$

$$= \frac{83.5}{2} - 43.5 \Rightarrow 41.75 - 43.5 \Rightarrow -1.75$$

अत: इस वितरण में ऋणात्मक वैषम्य (nagative skewness) है, जिसकी मात्रा 1.75 है ।

उदाहरण–2

P_{10}, P_{50} तथा P_{90} क्रमश: 57, 71.17 तथा 87.5 है । इस वितरण का वैषम्य निम्नलिखित होगा—

$$\text{वैषम्य} = \frac{87.5+57}{2} - 71.17 \Rightarrow \frac{144.5}{2} - 71.17$$

$$= 72.25 - 71.17 = 1.08$$

अत: इस वितरण में धनात्मक वैषम्य (positive skewness) है, जिसकी मात्रा 1.08 है ।

6.6 ककुदता (Kurtosis)

6.6.1 अर्थ (Meaning)

बारंबारता-वितरण (frequency distribution) की विशेषताओं को निर्धारित करने में तीन मापों (measures) की व्याख्या पहले हो चुकी है, जिन्हें केन्द्रीय प्रवृत्ति (central tendency), विचलनशीलता (variability) तथा वैषम्य (skewness) कहते हैं । लेकिन वितरण की पूर्ण व्याख्या के लिए एक और माप की आवश्यकता होती है, जिसे ककुदता (kurtosis) कहते हैं ।

ककुदता (Kurtosis) का अर्थ है नुकीलापन (peakedness) अथवा चिपटापन (flatress) । प्रसामान्य वितरण (normal distribution) की तुलना में यदि कोई बारंबारता-वितरण नुकीला (peaked) या चिपटा हो जाए तो इसे ककुदता कहेंगे ।

प्रसामान्य वक्र से तुलना करने पर वक्र अधिक नुकीला या चपटा होता है तो वक्र में प्रसामान्यता का अभाव पाया जाता है । वह वक्र ककुदी होता है । ककुदता वक्र को देखकर प्रसामान्यता के बारे में अनुमान लगाया जाता है ।

6.6.2 परिभाषाएँ (Definitions)

क्राक्टसन तथा **क्राउडन (Croxton & Crowden)** के शब्दों में "ककुदता माप उस मात्रा की ओर संकेत करता है जिस मात्रा में आवृत्ति वितरण का वक्र नुकीला या चपटा होता है ।" (A measure of Kurtosis indicates us the degree to which a curve of a frequency distribution is peaked or flat stopped.)

—*Croxton & Crowden*

गैरेट (Garrett) के अनुसार, "शब्द ककुदता प्रसामान्य की तुलना में आवृत्ति वितरण के नुकीलेपन या चपटेपन की ओर संकेत करता है ।" (The term kurtosis of frequency distribution as compared with normal)

—*Garrett*

इसी तरह **डॉ० मोहसिन (Dr. Mohsin, 1985)** के अनुसार, "किसी वक्र के चिपटापन या दीर्घाकरण को ककुदता कहते हैं । (The flattering or elngation of a curve is called Kurtosis).

—*Dr. Mohsin*, 1985

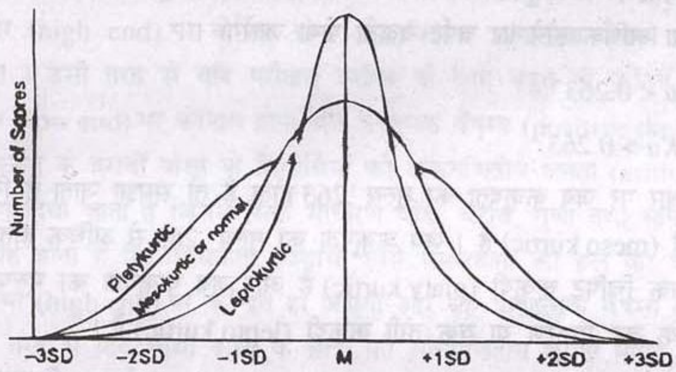
6.6.3 प्रकार (Types)

कुकुदता मुख्यत: तीन प्रकार का होता है—

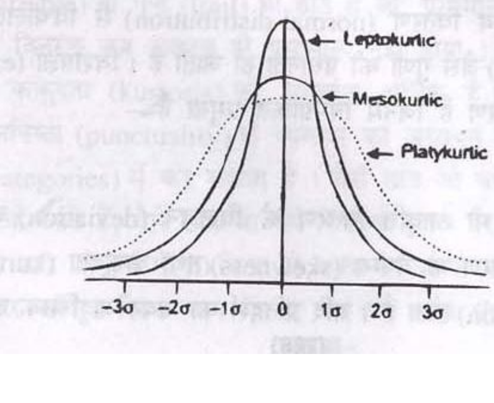
2.6.3.1 तुंग वक्रता मात्रा वक्र (Leptokurtic Curve)

2.6.3.2 मध्य वक्रता मात्रा वक्र (Normal or Mesokurtic Curve)

2.6.3.3 चर्पट वक्रता मात्रा वक्र (Platykurtic Curve)



इसमें पहले प्रकार का वक्र बीच में बहुत ऊँचा होता है, जबकि दूसरे प्रकार का वक्र न बहुत ऊँचा न नुकीला और न बहुत चपटा होता है । इसे मध्यककुदता (Mesokurtic) या प्रसामान्य ककुदता (Normal Kurtosis) भी कहते हैं । जबकि तीसरे प्रकार का वक्र बहुत चपटा होता है । तुंग ककुदी वक्र में प्राप्तांकों का जमाव मध्यमान के आस-पास होता है । दोनों छोरों पर प्राप्तांक कम होते हैं । इसे ऋणात्मक ककुदता (Negative Kurtosis) भी कहते हैं । चर्पट वक्रता मात्रा वक्र में प्राप्तांक मध्यमान के पास न होकर दोनों छोरों की ओर अधिक फैल होते हैं । इसे धनात्मक ककुदता (Postive Kurtosis) ।



6.6.4 ककुदता का परिकलन (Calculation of Kurtosis)

ककुदता को निकालने का सूत्र (formula) निम्नलिखित है—

$$Ku = \frac{Q}{(P_{90} - P_{10})}$$

यहाँ Ku = ककुदता (Kurtosis)

Q = चतुर्थक विचलन (Quartile deviation)

P = शततमक (Percentile)

$PE = Q = .6745\sigma$

तालिका से यह ज्ञात होता है कि M और P_{90} के बीच की सिग्मा दूरी $+ 1.28\,\sigma$ है । इसी प्रकार M और P_{10} के बीच की दूरी $- 1.28\sigma$ है । इसलिए

$$Ku = \frac{.6745}{[1.28 - (-1.28)]} \Rightarrow \frac{.6745}{2.56} \Rightarrow .263$$

यदि प्रसामान्य वितरण में ककुदता का मान = .263 होता है, ककुदता का मान = .263 से कम होने पर तो वक्र में तुंगवक्रता तथा अधिक होने पर चर्पट वक्रता पाया जायेगा ।

तुंग वक्रता $= Ku < 0.263$

चर्पट वक्रता $= Ku > 0.263$

इस सूत्र के आधार पर जब ककुदता का मूल्य .263 होता है तो समझा जाता है कि वह वितरण या वक्र प्रसामान्य या मध्य ककुदी (meso kurtic) हे । जब ककुदता का मूल्य .263 से अधिक होता है तो इसका अर्थ यह है कि वह वितरण या वक्र चिपिट ककुदी (platy kurtic) है और जब ककुदता का मूल्य .263 से कम होता है तो इसका अर्थ यह है कि वह वितरण या वक्र तंगी ककुदी (lepto kurtic) है ।

स्पष्ट है कि वैषम्य (skewness) की तरह ककुदता (kurtosis) बारंबारता-वितरण के विचलन की एक महत्वपूर्ण माप (measure) है । किन्तु दोनों के स्वरूप (nature) तथा कार्य (function) में अन्तर है । वैषम्य का काम यह दिखाना है कि कोई बारंबारता-वक्र (fequency curve) प्रसामान्य वक्र की तुलना में दाएँ फैला हुआ है या नहीं और यदि है तो किस मात्रा में है, दूसरी ओर ककुदता का कार्य यह बतलाना है कि कोई बारंबारता-वक्र प्रसामान्य वक्र की अपेक्षा नुकीला (peaked) या चिपटा (flat) है या नहीं और यदि है तो किस मात्रा में ।

6.7 प्रसामान्यता से विचलन के कारण (Causes of Deviations from Normality)

जब आवृत्ति वितरण प्रसामान्य वितरण (normal distribution) से विचलित होता है तो उसमें वैषम्य (skewness) तथा ककुदता (kurtosis) जैसे गुणों की प्रधानता हो जाती है । विशेषज्ञों (experts) के अनुसार इस तरह के विचलन (deviation) के कई कारण है जिनमें निम्नांकित प्रमुख है—

6.7.1 चयन (Selection)

प्रसामान्य वितरण से किसी भी आवृत्ति वितरण के विलचन (deviation) का एक प्रमुख कारण चयन (selection) है । दूसरे शब्दों में, वितरण के वैषम्य (skewness) तथा ककुदता (kurtosis) का एक प्रमुख कारण प्रतिदर्श (sample) का चयन (selection) होता है । यदि प्रतिदर्श का चयन यादृच्छिक ढंग से (randomly) न होकर

पूर्वग्रहित (biased) ढंग से किया गया हो, तो ऐसी परिस्थिति में मानकीकृत परीक्षण (standardized test) भी दिये जाने प्राप्तांकों का वितरण प्रसामान्य न होकर विषम (skewed) होता है । जैसे—मान लिया जाए कि कोई बुद्धि परीक्षण (intelligence test) हम वैसे बालकों के समूह में देते हैं जिसमें सभी बालक तीव्र बुद्धि के हैं । इस परीक्षण के आधार पर आये प्राप्तांक अवश्य ही वितरण की ऊपरी छोर (high end) यानी आलेख (graph) के दायीं तरफ केंद्रित होंगे । स्पष्ट है कि इस तरह का वितरण ऋणात्मक रूप से (negatively) विषम (skewed) होगा । उस तरह से सिर्फ मंद बुद्धि के बालकों से मिले प्राप्तांकों वितरण की निचली छोर (low end) यानी आलेख (graph) के बायीं ओर केन्द्रित होंगे । इस तरह वितरण को हम धनात्मक रूप से (positively) विषम (skewed) कहेंगे ।

उसी तरह से अगर समूह छोटा तथा समजातीय (homogeneous) है तो उससे आये प्राप्तांकों के वितरण को तुगककुदी (heptokurtic) होने की संभावना अधिक है तथा अगर समूह बड़ा और विषमजातीय (heterogeneous) है तो प्राप्तांकों के वितरण को चिपिटककुदी (platykurtic) होने की संभावना अधिक है । ऊपर के इन उदाहरणों से स्पष्ट है कि व्यक्तियों या प्रतिदर्शों के पूर्वग्रहित चयन (biased selection) के कारण आवृत्ति वितरण में वैषम्य (skewness) या ककुदता (kurtosis) की संभावना बढ़ जाती है ।

6.7.2 अनुपयुक्त परीक्षण (Unsuitable Test)

आवृत्ति वितरण (frequency distribution) का प्रसामान्य वितरण से विचलित होने का दूसरा प्रमुख कारण अनुपयुक्त परीक्षण (unsuitable test) का प्रयोग है । अगर परीक्षण व्यक्ति के लिए बहुत ही आसान तो प्राप्तांक वितरण के ऊपरी छोर (high end) पर केन्द्रित होगा और वितरण ऋणात्मक वैषम्य (negative skewness) का उदाहरण प्रस्तुत करेगा । उसी तरह से यदि परीक्षण व्यक्ति के लिए बहुत ही कठिन (difficult) है तो प्राप्तांक वितरण के निचले छोर (low end) पर केन्द्रित होगा और धनात्मक वैषम्य (positive skewness) का उदाहरण प्रस्तुत करेगा । जैसे अगर विज्ञान के दसवीं कक्षा के विद्यार्थियों की अंकगणितीय क्षमता (arithmetical ability) मापने के लिए एक ऐसा परीक्षण दिया जाता है जिसमें सिर्फ साधारण जोड, घटाव, गुणा तथा भाग से संबंधित समस्या हो तो बहुत ज्यादा उम्मीद यह होता है कि अधिकतर विद्यार्थी ऐसी समस्याओं का हल कर देंगे और अधिकतर प्राप्तांक वितरण की ऊपरी सीमा (high end) पर केन्द्रित हो जाएगी और यह ऋणात्मक वैषम्य (negetive skewness) का उदाहरण होगा । उसी तरह से यदि चौथी कक्षा के छात्रों को अंकगणितीय क्षमता मापने के लिए कोई ऐसा परीक्षण दिया जाये जिसमें जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग से संबंधित कठिन से कठिन समस्याएँ हों तो ज्यादा उम्मीद यह है कि अधिकतर छात्र इन समस्याओं को हल नहीं कर पायेंगे और प्राप्तांक (scores) वितरण के निचले छोर (low end) पर केन्द्रित हो जायेगा, यह धनात्मक वैषम्य (positive skewness) का उदाहरण होगा । परीक्षण की कठिनता स्तर (difficutly level) के अलावा अस्पष्ट निर्देष (vague instruction) तथा अस्पष्ट एकांश (item) की वजह से भी वितरण में वैषम्य हो सकता है ।

6.7.3 अप्रसामान्य वितरण (Non-Normal Distribution)

कुछ ऐसे चर (variable) या गुण (trait) भी होते हैं जो, प्रसामान्य (normal) नहीं होते हैं । ऐसे चर या गुण से मिले प्राप्तांकों का वितरण जब अवश्य ही प्रसामान्य नहीं होगा । दूसरे शब्दों में, इस तरह के वितरण में वैषम्य (skewness) तथा ककुदता (kurtosis) की संभावना अधिक है । जैसे, मान लिया जाय कि शोधकर्त्ता (researcher) छात्रों में समनिष्ठा (punctuality) के व्यवहार का अध्ययन करना चाहता है । इसके लिए वह छात्रों की गणना चार श्रेणियों (categories) में कर सकता है । वैसे छात्र जो वर्ग में ठीक समय पर आते हैं; वैसे छात्र जो वर्ग में 5 मिनट देर करके आते हैं, वैसे छात्र जो वर्ग मे ठीक समय पर आते हैं, वैसे छात्र जो वर्ग में 10 मिनट देर करके आते हैं तथा वैसे छात्र जो वर्ग में 10 मिनट से ज्यादा देर करके आते हैं । इससे प्राप्त आँकड़ों को आलेख (graph) पर यदि इस प्रकार अंकित किया जाय कि X अक्ष पर समय (0, 5, 10 तथा 10 निमट से अधिक) तथा

Y अक्ष पर उस समय पर वर्ग में पहुँचने की छात्रों की आवृत्ति (frequency) हो तो यह पाया जायेगा कि अधिकतम छात्र '0 समय' (यानि ठीक समय पर) केन्द्रित होंगे तथा 5, 10 तथा 10 मिनट से अधिक समय बीतने पर आने वाले छात्रों की संख्या कम होगी और इस तरह के वक्र धनात्मक रूप से (positive) विषम (skewed) होगा । कुछ ऐसे भी चर हैं जिनमें मापने से नालाकृति वक्र (U-shaped curve) आते हैं और ऐसे वक्र अप्रसामान्य (non-normal) वितरण को प्रदर्शित करते हैं । जैसे मान लिया जाए कि एक समूह ऐसा है जिसमें 20 सामान्य व्यक्ति हैं और 20 मानसिक रूप से बीमार व्यक्ति हैं । यदि इन सभी व्यक्तियों को तंत्रिकातापी व्यक्तित्व परीक्षण (neurotic personality inventory) दिया जाये तो इस परीक्षण पर सामान्य व्यक्ति का प्राप्तांकों बहुत छोटा होगा तथा मानसिक रोग ग्रस्त व्यक्ति का प्राप्तांक बहुत बड़ा (large) होगा । इससे वितरण के बीच में गहराई हो जायेगी और उसे जब आलेख पर रेखांकित किया जाएगा तो इससे नालाकृति वक्र (U-shaped curve) ही बनेगा जो सर्वथा अप्रसामान्य (non-normal) ही होगा ।

2.7.4 परीक्षण के निर्माण तथा क्रियान्वयन में त्रुटियाँ (Errors in Construction and Adiministration of the Test)—कभी-कभी परीक्षण के निर्माण में कुछ प्रमुख त्रुटियाँ रह जाता है । जैसे—एकांश (item) का अर्थ स्पष्ट होना, निर्देश का अर्थ स्पष्ट होना, पर्याप्त समय का अभाव आदि । उसी तरह से कुछ प्रमुख त्रुटियाँ परीक्षण के क्रियान्वयन (administration) में कभी-कभी रह जाती हैं । ऐसी त्रुटियों का एकमात्र परिणाम यह होता है कि प्राप्तांकों का वितरण प्रसामान्य न होकर विषम (skewed) हो जाता है ।

स्पष्ट हुआ कि आवृत्ति वितरण के प्रसामान्य वितरण (normal distribution) से विचलित (deviate) होने के कई कारण हैं ।

6.8 वैषम्य वितरण का सामान्यीकरण (Normalisation of Skewed Distribution)

प्राचलिक सांख्यिकी विधियों का प्रयोग केवल वहीं किया जा सकता है, जबकि प्राप्त आँकड़ों का स्वरूप सामान्य सम्भाव्यता वक्र (Normal Probability Curve) के अनुरूप प्राप्त होता है । यदि आँकड़ों का स्वरूप सामान्य वितरण के अनुरूप नहीं है तथा उसके वितरण के स्वरूप में विषमता है, तब प्राचलिक सांख्यिकी विधि यों का प्रयोग उपयुक्त नहीं होता है । वितरण के स्वरूप में विषमता होने पर अनुसन्धानकर्त्ता के लिए अप्राचलिक सांख्यिकी विधियों का प्रयोग करना उपयुक्त होता है । यदि अनुसन्धानकर्त्ता यह अपेक्षा रखता है कि अनुसन्धान की परिकल्पनाओं की जाँच प्राचलिक साख्यिकी विधियों द्वारा की जायें, तब ऐसी स्थिति में प्राप्त आँकड़ों के वितरण का सामान्यीकरण करना आवश्यक होता है । वितरण में स्थित विषमता का सामान्यीकरण करने अर्थात् सामान्य वितरण का आसंजन (Fitting of Normal Distribution) करने के पश्चात् वांछित प्राचलिक सांख्यिकी विधियों का प्रयोग करना उपयुक्त होता है ।

विषमता वितरण का सामान्यीकरण निम्नलिखित दो विधियों द्वारा किया जा सकता है—

6.8.1 कोटि अक्ष विधि (Ordinate Method)

6.8.2 क्षेत्रफल विधि (Area Method)

6.8.1 कोटि अक्ष विधि (Oridnate Method)

कोटि अक्ष विधि से निम्नलिखित चरणों द्वारा विषमता प्राप्त वितरण (Skewed Distribution) को सामान्य वितरण (Normal Distribution) में परिवर्तित किया जा सकता है ।

1. सर्वप्रथम आवृत्ति वितरण का मध्यमान तथा प्रामाणिक ज्ञात करना ।
2. प्रत्येक वर्गान्तर के मध्य बिन्दु ((Mid point X) तथा मध्यमान के अन्तर में प्रामाणिक विचलन ($S.D.$) का भाग देकर Z का मूल्य ज्ञात करना $\left(\frac{X-M}{\sigma}\right)$ ।

3. प्रत्येक वर्गान्तर के Z मूल्य के आधार पर तालिका द्वारा कोटि अक्ष (ordinate Y) का मूल्य ज्ञात करना ।

4. प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात करना ।

$$\frac{\text{वर्ग अन्तराल} \times \text{ आवृत्तियों का कुल योग } \times y \text{ मूल्य}}{\text{प्रामाणिक विचलन}} \text{ अथवा } \frac{i \times N \times y}{S.D.}$$

उदाहरण–1

निम्नलिखित आवृत्ति वितरण के आधार पर कोटि अक्ष विधि (Ordinate Method) द्वारा वितरण में स्थित विषमता का सामान्यीकरण कीजिये—

वर्गान्तर (*C.I.*)	आवृत्ति (*f*)
45-50	1
40-45	5
35-40	11
30-35	23
25-30	36
20-25	20
15-20	8
10-15	4
5-10	2
	$N = 110$

सर्वप्रथम उपर्युक्त आवृत्ति वितरण का मध्यमान तथा प्रामणिक विचलन ($S.D.$) ज्ञात करेंगे—

C.I.	*f*	*d*	*fd*		*fd*² ($fd \times d$)	*X* (Midpoint)	*Z*	*Y*	सामन्यीकृत आवृत्ति
45-50	1	+4	4		16	47	2.62	0.0219	0.95 = 01
40-45	5	+3	15		45	42	1.95	0.0596	4.37 = 04
35-40	11	+2	22		44	37	1.28	.1758	12.89 = 13
30-35	23	+1	23	$\boxed{64}$	23	32	0.62	.3292	24.14 = 24
25-30	36	0	0		00	27	-0.05	.3984	29.22 = 29
20-25	20	-1	-20		20	22	-0.71	.3101	22.74 = 23
15-20	8	-2	-16		32	17	-1.38	.1539	11.29 = 11
10-15	4	-3	-12		36	12	-2.05	.0488	3.58 = 04
5-10	2	-4	-8	$\boxed{-56}$	32	7	-2.71	.0101	0.74 = 01
	$N = 110$		$\Sigma fd = +8$		$\Sigma fd^2 = 248$				$N = 110$

1. मध्यमान (Mean) $= AM + \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right) i \Rightarrow 27 + \left(\frac{8}{110}\right) \times 5 \Rightarrow 27.36$

2. प्रामाणिक विचलन $(S.D.) = i\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$

$$= 5\sqrt{\frac{248}{110} - \left(\frac{8}{110}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{2.25 - 0.00}$$

$$= 5 \times 1.50$$

$$= 7.50$$

3. प्रत्येक वर्गान्तर का z मूल्य $\frac{\text{मध्यबिन्दु} - \text{मध्यमान}}{\text{प्रामाणिक विचलन}}\left(\frac{X - M}{S.D.}\right)$ सूत्र द्वारा ज्ञात किया गया । प्रथम वर्गान्तर का मध्यबिन्दु 7 है तथा वितरण का मध्यमान 27.36 व प्रामाणिक विचलन 7.50 प्राप्त हुआ, अतः z मूल्य $= \frac{7.26.36}{7.50} \Rightarrow \frac{-20.36}{7.50} \Rightarrow -2.71$ प्राप्त होगा । इसी प्रकार प्रत्येक वर्गान्तर के z मूल्य को ज्ञात किया गया ।

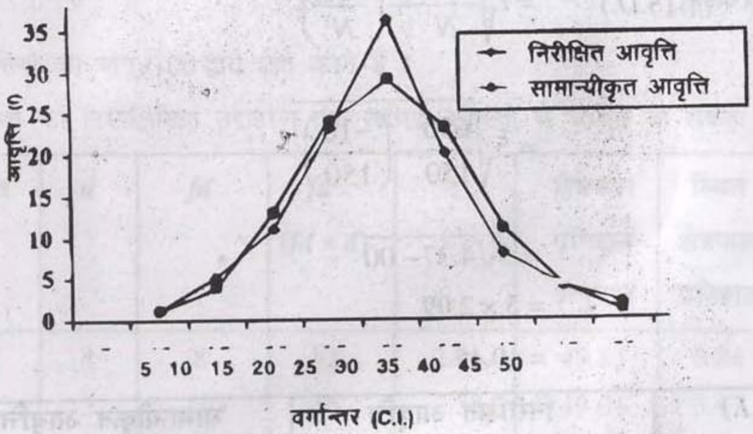
4. प्रत्येक वर्गान्तर के z के मूल्य के आधार पर सारणी द्वारा y मूल्य (y value) ज्ञात किया गया ।

5. अन्त में, प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति को सूत्र

$\frac{\text{वर्ग अन्तराल} \times \text{आवृत्तियों का कुल योग} \times y \text{ मूल्य}}{\text{प्रामाणिक विचलन}}$ अथवा $\frac{i \times N \times y}{S.D.}$ द्वारा ज्ञात किया गया । प्रत्येक वर्गान्तर का अन्तराल $5(i = 5)$ है तथा आवृत्तियों का योग 110 $(N = 110)$ है । प्रामाणिक विचलन भी 7.50 है । परन्तु प्रत्येक वर्गान्तर का y मूल्य अलग-अलग है । सामान्यीकृत आवृत्ति की गणना करें तब प्रथम वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति $\frac{5 \times 110 \times 0.0101}{7.50} = 0.74$ होगी । आधे से अधिक होन के कारण इसे 1 सामन्यीकृत आवृत्ति मान सकते हैं ।

इसी प्रकार सूत्र द्वारा प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति ज्ञात करते हैं । इस प्रकार कोटि अक्ष विधि द्वारा विषमता प्राप्त वितरण (Skewed Distribution) को अग्रलिखित रूप में सामान्य वितरण (Normal Distribution) में परिवर्तित किया जा सकता है । इसे आलेखीय (Graphical) रूप में अधिक स्पष्ट रूप से प्रदर्शित कर सकते हैं ।

वर्गान्तर (*C.I.*)	निरीक्षित आवृत्ति	सामान्यीकृत आवृत्ति
45-50	1	1
40-45	5	4
35-40	11	13
30-35	23	24
25-30	36	29
20-25	20	23
15-20	8	11
10-15	4	4
5-10	2	1
	$N = 110$	$N = 110$
मध्यमान (Mean)	27.36	27.23
प्रामाणिक विचलन (*S.D.*)	7.50	7.50



स्पष्ट है कि सामान्यीकृत आवृत्तियों द्वारा निर्मित आवृत्ति बहुभुज सामान्य वितरण वक्र को प्रदर्शित कर रहा है । निरीक्षित आवृत्ति तथा सामान्यीकृत आवृत्ति दोनों के मध्यमान तथा प्रामणिक विचलन (*S.D.*) भी लगभग समान प्राप्त हुए हैं । यदि प्रथम और अन्तिम वर्गान्तरों में z का मूल्य ± 3 से कम प्राप्त होता है तब ऐसी स्थिति में सामान्यीकृत आवृत्ति बनाते समय एक वर्गान्तर प्रारम्भ में तथा एक वर्गान्तर अन्त में निर्मित करते हैं एवं उसकी आवृत्ति शून्य रखते हैं । जैसा कि अग्रलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट है—

वर्गान्तर *C.I.*	आवृत्ति *f*	*d*	*fd*	fd^2	$(fd \times d)$	*X*	*Z*	*Y*	सामन्यीकृत आवृत्ति
50-55	0				52	2.42	.0213	1.52	1
45-50	10	4	40	160	47	1.95	0.9596	4.28	4
40-45	8	3	24	72	42	1.47	.1354	9.72	10
35-40	15	2	30	60	37	.99	.2444	17.54	18
30-35	25	1	25	25	32	.51	.2444	25.14	25
25-30	32	0	00	00	27	.03	.3503	28.62	29
20-25	20	-1	-20	20	22	-.45	.3988	25.87	26
15-20	18	-2	-36	72	17	-.92	.3605	18.75	19
10-15	15	-3	-45	135	12	-1.40	.2613	10.74	11
5-10	7	-4	-28	112	7	-1.88	.1497	4.89	5
$\boxed{0\text{-}5}$	0				2	-2.36	.0246	1.76	2
	N=150		Σfd=10		Σfd^2 = 656				*N* = 150

मध्यमान (Mean) $= AM + \left(\dfrac{\Sigma fd}{N}\right) \times i$

$$= 27 + \frac{-10}{150} \times 5$$

$$= 27 - 0.33$$

$$= 26.67$$

प्रामाणिक विचलन (S.D.) $= i\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$

$$= 5\sqrt{\frac{656}{150} - \left(\frac{-10}{150}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{4.37-.00}$$

$$= 5 \times 2.09$$

$$= 10.45$$

वर्गान्तर (*C.I.*)	निरीक्षित आवृत्ति	सामान्यीकृत आवृत्ति
50-55	0	1
45-50	10	4
40-45	8	10
35-40	15	18
30-35	25	25
25-30	32	29
20-25	20	26
15-20	18	19
10-15	18	11
5-10	7	5
0-5	0	2
	$N = 150$	$N = 150$

6.8.2 क्षेत्रफल विधि (Area Method)

क्षेत्रफल विधि के द्वारा भी विषमता प्राप्त वितरण (Skewed Distribution) को सामान्य वितरण (Normal Distribution) में परिवर्तित किया जा सकता है। इस विधि के निम्नलिखित चरण हैं—

1. सर्वप्रथम आवृत्ति वितरण का मध्यमान (Mean) तथा प्रामाणिक विचलन (*S.D.*) की गणना की जाती है।
2. प्रत्येक वर्गान्तर की शुद्ध उच्चतम सीमा (exact upper limit) तथा मध्यमान के अन्तर में प्रामाणिक विचलन (*S.D.*) का भाग देकर z मूल्य ज्ञात

   $\left(\frac{\text{Upper Limit} - \text{Mean}}{S.D.}\right)$ किया जाता है।
3. प्रत्येक वर्गान्तर के z मूल्य के आधार पर सारणी–A द्वारा क्षेत्रफल प्रतिशत अनुपात ज्ञात करते हैं।
4. प्रत्येक वर्गान्तर के अन्तर्गत स्थित प्रतिशत क्षेत्रफल ज्ञात करना।

5. प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति सूत्र $\left(\text{Area Percent}\times\frac{N}{100}\right)$ प्रतिशत क्षेत्रफल × (आवृत्तियों का योग)/100 द्वारा ज्ञात करते हैं ।

उपर्युक्त चरणों को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा अधिक स्पष्टता से समझा जा सकता है—

वर्गान्तर C.I.	आवृत्ति f	d	fd	fd^2 $(fd \times d)$	z	क्षेत्रफल प्रतिशत अनुपात	स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत	सामान्यी कृत्त आवृत्ति
45-49	2	4	8	32	2.96	49.85	0.84	1
40-44	4	3	12	36	2.33	49.01	3.47	3
35-39	8	2	16	32	1.70	45.54	9.77	10
30-34	12	1	12 +48	12	1.07	35.77	18.77	19
25-29	35	0	00	00	0.44	17.00	24.33	25
20-24	18	-1	-18	18	-0.19	7.35	21.86	22
15-19	14	-2	-28	56	-0.82	29.33	13.26	13
10-14	6	-3	-18	54	-1.45	42.65	5.47	5
5-9	01	-4	-4 −68	16	-2.28	48.12	1.88	2
					50.00			
	$N = 100$		$\Sigma fd = -20$	$\Sigma fd^2 = 256$				$N = 100$

1. सर्वप्रथम दिये गये आवृत्ति वितरण का मध्यमान (Mean) ज्ञात करेंगे ।

मध्यमान (Mean) $= A.M. + \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)i$

$$= 27 + \frac{-20}{100}i$$

$$= 27 + (-1.00)$$
$$= 27 - 1.00$$
$$= 26.00$$

2. प्रामाणिक विचलन की गणना की गई—

प्रामाणिक विचलन $(S.D.) = i\sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fd}{N}\right)^2}$

$$= i\sqrt{\frac{256}{100} - \left(\frac{-20}{100}\right)^2}$$

$$= 5\sqrt{2.56 - .04}$$

$$= 5\sqrt{2.52}$$
$$= 5 \times 1.59$$
$$= 7.95$$

3. प्रत्येक वर्गान्तर की शुद्ध उच्चतम सीमा (Exact Upper Limit) तथा प्राप्त मध्यमान (26.00) के अन्तर में प्रामाणिक विचलन (7.95) का भाग देते हुए z मूल्य ज्ञात करते हैं ।

प्रथम वर्गान्तर का z मूल्य ज्ञात करने के लिये वर्गान्तर की शुद्ध उच्चतम सीमा 9.50 में से मध्यमान 25.00 को घटाकार प्रामाणिक विचलन 8.85 का भाग दिया गया—

$$z \text{ मूल्य} = \frac{\text{शुद्ध उच्चतम सीमा(वर्गान्तर की)} - \text{मध्यमान}}{\text{प्रामाणिक विचलन}}$$

$$z \text{ मूल्य} = \frac{9.50 - 26.00}{7.95} \Rightarrow -2.08$$

4. प्रत्येक वर्गान्तर के z मूल्य के आधार पर तालिका द्वारा क्षेत्रफल प्रतिशत अनुपात ज्ञात किया गया। प्रथम वर्गान्तर के z मूल्य 2.08 के आधार पर तालिका द्वारा क्षेत्रफल प्रतिशत अनुपात 48.12 प्राप्त हुआ ।

5. क्षेत्रफल प्रतिशत अनुपात के आधार पर प्रत्येक वर्गान्तर के अन्तर्गत स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत ज्ञात किया गया । प्रथम वर्गान्तर (5-9) के प्रतिशत 48.12 को कुल 50 प्रतिशत से घटाने पर प्रथम वर्गान्तर में स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत (50 – 48.12) 1.88 प्राप्त हुआ । इसी प्रकार दूसरे वर्गान्तर (10–14) के अन्तर्गत स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत 5.47 (48.12–42.65) प्राप्त हुआ । इस प्रकार सभी वर्गान्तर के अन्तर्गत स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत ज्ञात किया गया । वर्गान्तर 25–29 में स्थित क्षेत्रफल अनुपात 7.53 में 17.00 को जोड़कर 24.53 प्रतिशत प्राप्त किया गया ।

6. अन्त में, प्रत्येक वर्गान्तर की सामान्यीकृत आवृत्ति को स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत के आधार पर ज्ञात किया गया । वर्गान्तर में स्थित प्रतिशत क्षेत्रफल का गुणा, आवृत्तियों के योग (N) से कर 100 का भाग देकर सामान्यीकृत आवृत्ति ज्ञात करते हैं । इसे निम्नलिखित सूत्र द्वारा भी ज्ञात कर सकते हैं—

$$\text{सामन्यीकृत आवृत्ति} = \frac{\text{स्थित क्षेत्रफल प्रतिशत} \times \text{आवृत्ति का योग}(N)}{100}$$

$$\text{प्रथम वर्गान्तर } (5-9) \text{ की सामान्यीकृत आवृत्ति} = \frac{1.88 \times 100}{100} \Rightarrow 1.88 \Rightarrow 2$$

इस प्रकार क्षेत्रफल विधि द्वारा अग्रलिखित रूप में सामान्यीकृत आवृत्ति प्राप्त होती है—

वर्गान्तर (*C.I.*)	निरीक्षित आवृत्ति	सामान्यीकृत आवृत्ति
45-49	2	1
40-44	4	3
35-39	8	10
30-34	12	19
25-29	35	25
20-24	18	22
15-19	14	13
10-14	6	5
5-9	1	2
N	100	100
मध्यमान (Mean)	26.00	26.05
प्रामाणिक विचलन (*S.D.*)	7.95	7.90

6.9 सारांश (Summing up)

प्रसामान्य वक्र संयोग के नियमों द्वारा घटित होने वाली घटनाओं की बारंबारता को बतलाता है । इस वक्र की कई विशेषताएँ हैं—(i) यह घंटी के आकार की होती है । (ii) इसका मध्यमान, मध्यांक तथा बहुलक एक ही होता है । (iii) इसके दोनों छोर-आधार रेखा को स्पर्श नहीं करता है । (iv) इसका विषमता गुणांक शून्य होता है । (v) इसका क्षेत्रफल -3σ से $+3\sigma$ तक 99.73% होता है । (vi) यह एक निरन्तर वक्र है । (vii) इसके अन्तर्गत विचलन के विभिन्न मापकों के बीच एक निश्चित संबंध होता है ।

वैषम्य या विषमता एक प्रसामान्य संभाव्यता वक्र का विचलन है जिस कारण वक्र दाहिनी या बांयी ओर झुक जाती है । इसे ही विषमता कहते हैं । पूर्ण सुडौलपन से किसी आवृत्ति वितरण के विचलन की मात्रा को विषमता कहते हैं ।

प्रसामान्य वक्र (normal curve) के माध्य (mean), माध्यिका (median) तथा बहुलक (mode) एक ही बिन्दु पर पड़ते हैं तथा इन तीनों का मान (value) संख्यात्मक रूप से (numerically) बराबर-बराबर होते हैं । इसका परिणाम यह होता है कि प्रसामान्य वक्र का चित्र काफी संतुलित (balanced) दीख पड़ता है क्योंकि इसका दायाँ और बायाँ भाग ठीक एक-दूसरे के बराबर होता है । लेकिन जब वितरण में वैषम्य (Skewness) होता है, तो ऐसा नहीं होता है तथा माध्य (mean) एवं माध्यिका (median) एक ही बिन्दु पर न पड़कर अलग-अलग पड़ते हैं तथा प्राप्तांकों का केन्द्रीकरण (centralisation) वितरण के बायी या दायीं छोर पर हो जाता है । **कर्ज** तथा **मेओ (Kurtz & Mayo, 1979)** के शब्दों में, "सममित आकार में जिस मात्रा में आवृत्ति वितरण विचलित होता है उसे वैषम्य की संज्ञा दी जाती है ।" प्रसामान्य वक्र में माध्य और माध्यिका दोनों ही बराबर-बराबर होते हैं, इसलिए वैषम्य (skewness) शून्य होता है । लेकिन विषम वितरण (skewed distribution) में माध्य तथा माध्यिका में अन्तर होता है । माध्य और माध्यिका में जितना ही बड़ा अन्तर होगा, वैषम्य (Skewness) उठना ही बड़ा होता है ।

वैषम्य (Skewness) दो प्रकार के होते हैं—

(a) धनात्मक वैषम्य (Positive Skewness) तथा

(b) ऋणात्मक वैषम्य (Negative Skewness)

धनात्मक वैषम्य (positive skewness) उस तरह के वितरण में पाया जाता है जहाँ प्राप्तांकों का केन्द्रीकरण वितरण के बायीं छोर (left extreme) या मापनी के निचले छोर (low end) पर होता है तथा माध्य (mean), माध्यिका (median) के दायीं ओर होता है ।

इसकी कई विशेषताएँ हैं—(i) यह दाहिनी या बायी ओर झुका रहता है । (ii) इसकी चोटी किसी एक ओर अधिक उठ जाती है । (iii) इसका मध्यमान, माध्यिका या बहुलांक एक जगह नहीं होता है । (iv) यह बहुलव की होता है । जब वक्र दाहिनी ओर झुका होता है तो इसे धनात्मक वैषम्य या विषमता कहते हैं तथा जब यह बायी ओर झुका रहता है तो इसे ऋणात्मक वैषम्य कहते हैं । वैषम्य की माप के दो आधार हैं—(i) मानक विचलन, तथा (ii) शततमक द्वारा

वैषम्य मापने का सूत्र इस प्रकार है—

$$Sk = \frac{3(\text{Mean} - \text{Median})}{S}$$

यहाँ, Sk = वैषम्य (Skewness)

S = मानक विचलन (Standard Deviation)

मान लिया जाय कि किसी आँकड़े का माध्य (mean) 10.00 तथा माध्यिका 11.00 है तथा मानक विचलन (Standard Deviation) 2.00 है । इस वितरण का वैषम्य (Skewness) इस प्रकार होगा ।

$$Sk = \frac{3(10-11)}{2} \Rightarrow \frac{-3}{2} \Rightarrow -1.5$$

स्पष्टत: यहाँ वैषम्य ऋणात्मक (negative) हुआ । वैषम्य (skewness) को शततमक (percentile) द्वारा भी ज्ञात किया जाता है जिसका सूत्र इस प्रकार है—

$$Sk = \frac{P_{90}+P_{10}}{2} - P_{50}$$

यहाँ Sk = वैषम्य (Skewness)

P = शततमक (percentile)

अगर किसी वितरण का $P_{10} = 112$, $P_{50} = 120$ तथा $P_{90} = 130$ है तो इसका वैषम्य

$= \frac{(130+112)}{2} - 120 \Rightarrow \frac{242}{2} - 120 \Rightarrow 1$ हुआ । स्पष्ट यहाँ वैषम्य धनात्मक (positive) है ।

ककुदता प्रसामान्य संभाव्यता वक्र का दूसरा महत्वपूर्ण विलचन की माप है जो वक्र के नुकीलेपन या चपटेपन को बताता है । इसके तीन प्रकार हैं—(i) तुंग-वक्रता मात्रा वक्र (Leptokurtic Curve–काफी नुकीला) (ii) मध्य-वक्रता मात्रा वक्र (Normal or Mesokurtic Curve)–बीच-बीच की उत्पत्ति । (iii) चर्पट वक्रता मात्रा वक्र (Playkurtic curve) काफी चिपटा । ककुदता का परिकलन होता है—

$$K_u = \frac{Q}{P_{90} - P_{10}}$$

जहाँ Q = चतुर्थक विलचन

P = शततमक

जैसे- यदि, $Q = 40$

$P_{90} = 20$

$P_{10} = 8$

तो, $K_u = \frac{40}{20-8} \Rightarrow \frac{40}{12} \Rightarrow 3.5$

प्रस्तुत विवरण से स्पष्ट है कि वैषम्य (Skewness) तथा ककुदता (Kurtosis) वास्तव में प्रसामान्यता या प्रसामान्य वितरण (normal distribution) के दो मुख्य विचलन (deviations) हैं । प्रश्न उठता है कि प्रसान्यता अथवा प्रसामान्य वितरण से विचलन के क्या कारण हैं । इस प्रश्न के उत्तर में निम्नलिखित कारकों या कारणों का उल्लेख मिलता है—

प्रसामान्यता या प्रसामान्य वितरण में विचलन का एक मुख्य कारण परीक्षण का अवैज्ञानिक होना है । परीक्षण (test) में जिस सीमा तक विश्वसनीयता (reliability) तथा वैधता (validity) की कमी होती है, वह परीक्षण उतनी ही अधिक अवैज्ञानिक होता है तथा उसके आधार पर प्राप्त आँकड़ों में प्रसामान्यता की कमी है अर्थात् विचलन (deviation) घटित होता है, जिसका मापन वैषम्य तथा ककुदता के रूप में किया जाता है ।

प्रसामान्यता से विचलन का दूसरा मुख्य कारण प्रतिदर्श (sample) का स्वरूप है । प्रतिदर्श जिस हद तक अपनी जनसंख्या (population) का प्रतिनिधित्व (representation) कर कर पाता है, प्रसान्यता वितरण की संभावना उतनी ही अधिक होती है । दूसरे शब्दों में प्रतिदर्श में अपनी जनसंख्या के प्रतिनिधित्व करने का गुण जितना ही

कम होता है, प्रसान्यता वितरण से विचलन की संभावना उतना ही अधिक होती है, जिसकी अभिव्यक्ति वैषम्य तथा ककुदता के रूप में होती है ।

प्रसान्यता से विचलन का एक कारण प्रतिदर्श का छोटा आकार (small size) है । जब प्रतिदर्श का आकार छोटा होता है तो प्राप्त आँकडों में प्रसामान्य वितरण की कमी हो जाती है और वैषम्य या ककुदता के रूप में विचलन दृष्टिगोचर होता है ।

अत: उपर्युक्त कारणों या कारकों को जिस हद तक नियंत्रित किया जाता है, उसी हद तक वितरण में प्रसामान्यता की संभावना अधिक होती है और वैषम्य एवं ककुदता की संभावना कम होती है ।

वैषम्य वितरण का सामान्यीकरण का दो विधि है जिसे कोटि अक्ष विधि (Ordinate Method) तथा क्षेत्रफल विधि (Area Method) कहते हैं । कोटि अक्ष विधि के निम्नलिखित चरण हैं—

(i) मध्यमान तथा प्रामाणिक विचलन का अवकलन ।

(ii) $Z = \frac{X - M}{\sigma}$ का अवकलन ।

(iii) z से y का अवलकन ।

(iv) सामान्यीकृत आवृत्ति का अवकलन $\left(\frac{i \times N \times y}{S.D.}\right)$

क्षेत्रफल विधि के निम्नलिखित चरण हैं—

(i) माध्य तथा प्रमाणिक विचलन का अवकलन ।

(ii) $z = \frac{UL - Mean}{S.D.}$ का अवकलन ।

(iii) z के आधार पर क्षेत्रफल का निर्धारण ।

(iv) सामान्यीकृत आवृत्ति सूत्र $\left(\text{Area Present} \times \frac{V}{100}\right)$

इस प्रकार हमने देखा कि प्रसामान्य संभाव्यता वक्र के विचलन के रूप में वैषम्य तथा ककुदता महत्वपूर्ण विचलन है ।

6.10 मॉडल प्रश्न (Model Questions)

1. वैषम्य से आप कया समझते हैं ? इसकी विशेषताएँ एवं प्रकारों का वर्णन करें ।
   (What do you understand by Skewness ? Describe its characteristics and types.)
2. वैषम्यता के विभिन्न मापों का विस्तृत उदाहरण के साथ वर्णन करें ।
   (Describe the various measures of Skewness with illustrated examples.)
3. ककुदता से आप क्या समझते हैं ? यह किस प्रकार वैषम्यता से भिन्न है ? विभिन्न प्रकार के ककुदता का वर्णन करें ।
   (What do you undeerstnad by Kurtosis ? How it is differnet from Skewness ? Describe various type of Kurtosis.)